Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

SEMINÁRNÍ PRÁCE Z METOD ŘEŠENÍ 1

TEORIE ČÍSEL

2000/2001 **Cifrik, M-ZT**

Příklad 23. ze zadávacích listů

Zadání:

Dokažte, že číslo $101^{103}+103^{101}$ je dělitelné číslem 51.

Důkaz:

Máme dokázat, že zbytek součtu $101^{103}+103^{101}$ po dělení číslem 51 je 0, proto použijeme kongruence podle modulu 51.

$$101 \equiv -1 \pmod{51} \qquad\qquad 103 \equiv 1 \pmod{51}$$
$$101^{103} \equiv -1^{103} = -1 \pmod{51} \qquad\qquad 103^{101} \equiv 1^{101} = 1 \pmod{51}$$
$$101^{103}+103^{101} \equiv -1+1 = 0 \pmod{51}$$

Tím je důkaz ukončen[1].

Použité věty:

V1: Kongruence podle téhož modulu můžeme sčítat.

V2:Obě strany kongruence je možné umocnit na totéž přirozené číslo.

Důkaz V2: Je-li $a \equiv b \pmod{m}$, dokážeme indukcí vzhledem k přirozenému číslu n, že $a^n \equiv b^n \pmod{m}$. Pro $n=1$ není co dokazovat. Platí-li $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ pro nějaké pevně zvolené n, vynásobením této kongruence a kongruence $a \equiv b \pmod{m}$ dostáváme $a^n \cdot a \equiv b^n \cdot b \pmod{m}$, tedy $a^{n+1} \equiv b^{n+1} \pmod{m}$, což je tvrzení pro $n+1$.
Důkaz indukcí je hotov.

[1] základní vlastností kongruencí

Příklad 53. ze zadávacích listů

Zadání:

Najděte nejmenší celé číslo, které se rovná (a) jedné polovině druhé mocniny a zároveň jedné třetině třetí mocniny, (b) jedné polovině druhé mocniny, jedné třetině třetí mocniny a zároveň jedné pětině páté mocniny, (c) jedné polovině druhé mocniny, jedné třetině třetí mocniny, jedné pětině páté mocniny a zároveň jedné sedmině sedmé mocniny.

Vypracování:

Ad a)
Číslo které hledáme má vyhovovat vztahu:

$$\frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{3} \qquad x \in Z\,,$$

po úpravě:

$$3x^2 = 2x^3$$
$$x^2(3-2x) = 0 \qquad (1)\,.$$

Rovnice (1) má v oboru celých čísel právě jedno řešení – $x = 0$, a to je i jediným řešením úkolů (b) a (c).

PRO HODNOCENÍ VÝBORNĚ JE TŘEBA CHÁPAT PŘÍKLAD V JINNÝCH SOUVISLOSTECH !!!

ÚLOHU JSEM NEOPRAVOVAL

První z úloh doporučené literatury str. 91/189[2]

Zadání:
Řešte v celých číslech rovnici $2x+3y+5z=15$.

Vypracování:
$D(2{,}3{,}5)=1$ proto je rovnice řešitelná[3].
Osamostatníme neznámou s nejmenším koeficientem.

$$x=\frac{15-3y-5z}{2}$$

$$x=7-y-2z+\frac{1-y-z}{2} \qquad (1)$$

čísla x,y,z jsou celá, proto i výraz $\frac{1-y-z}{2}$ musí být celý, abychom splnili podmínku zadání. Označme si

$$\frac{1-y-z}{2}=t\text{, } t \text{ je celé číslo.}$$

$$1-y-z=2t \qquad (2)$$

Z (2) vyjádříme y :

$$y=1-z-2t \qquad (3),$$

tedy po dosazení (3) do (1) je x:

$$x=7-1+z+2t-2z+t$$

$$x=6-z+3t \qquad (4)$$

(3), (4) dosadíme do původní rovnice v zadání

$$2(6-z+3t)+3(1-z-2t)+5z=15 \qquad (5)$$

$$12-2z+6t+3-3z-6t+5z=15$$

$$15=15$$

Za z a t můžeme dosadit ((5)) libovolná, na sobě nezávislá, celá čísla. V těchto případech říkáme, že řešení má dva „*stupně volitelnosti*“[4].
V tabulce uvádíme několik řešení rovnice.

t	0	0	1	1	-2
z	0	1	0	1	2
x	6	5	9	8	-2
y	1	0	-1	-2	3

Rovnice má nekonečně mnoho řešení.

---

[2] *U.S.Davydov, Š.Znám: Teória čísel. SPN Bratislava 1966*
[3] plyne z důsledku věty: *Nutnou podmínkou řešitelnosti rovnice Ax+By=C v celých číslech je (A,B)\C, tj. největší společný dělitel čísel A a B musí být dělitelem čísla C.* (*U.S.Davydov, Š.Znám: Teória čísel. SPN Bratislava 1966 str.39*)
[4] *U.S.Davydov, Š.Znám: Teória čísel. SPN Bratislava 1966 str.44, druhý odstavec.*

Druhá z úloh doporučené literatury str. 91/191[5]

Zadání:
Řešte v celých číslech rovnici $8x+7y+5z=79$.

Vypracování:
$D(5,7,8)=1$ proto je rovnice řešitelná[6].
Osamostatněme neznámou s nejmenším koeficientem.

$$z=\frac{79-8x-7y}{5}$$

$$z=15-x-y+\frac{4-3x-2y}{5} \qquad (1)$$

čísla x,y,z jsou celá, proto i výraz $\frac{4-3x-2y}{5}$ musí být celý (podmínka zadání). Označme si

$$\frac{4-3x-2y}{5}=t,\ t \text{ je celé číslo.}$$

$$4-3x-2y=5t \qquad (2)$$

Z (2) vyjádříme y :

$$y=\frac{4-3x-5t}{2}$$

$$y=2-x-2t-\frac{x+t}{2} \qquad (3),$$

výraz $\frac{x+t}{2}$ musí být také celý, označme tedy

$$\frac{x+t}{2}=v,\ v \text{ je celé číslo,}$$

$$2v=x+t \qquad (4)$$

z rovnice (4) vyjádřeme x, které dosadíme do (3), abychom proměnné x a y měli vyjádřeny pomocí t a v.

$$x=2v-t \qquad (5)$$

$$y=2-2v+t-2t-v$$

$$y=2-3v-t \qquad (6)$$

Proměnnými t a v vyjádřeme i z dosazením $(5)(6)$ do (1).

$$z=15-2v+t-2+3v+t+t$$

$$z=13+v+3t \qquad (7)$$

---

[5] *U.S.Davydov, Š.Znám: Teória čísel. SPN Bratislava 1966*

[6] plyne z důsledku věty: Nutnou podmínkou řešitelnosti rovnice *Ax+By=C* v celých číslech je *(A,B)\C*, tj. největší společný dělitel čísel *A* a *B* musí být dělitelem čísla *C*. (*U.S.Davydov, Š.Znám: Teória čísel. SPN Bratislava 1966 str.39*)

Dosaďme nakonec do původní rovnice

$$8(2v-t)+7(2-3v-t)+5(13+v+3t)=79$$
$$16v-8t+14-21v-7t+65+5v+15t=79$$
$$0=0$$

Rovnice má, jako v předchozím příkladě, dva stupně volitelnosti a tedy nekonečně mnoho řešení. V tabulce uvádíme několik řešení rovnice.

t	0	0	0	1	1	2	-1
v	0	1	2	1	2	3	2
x	0	2	4	1	3	4	5
y	2	-1	-4	-2	-5	-9	-3
z	13	14	15	17	18	22	12

Třetí z úloh doporučené literatury str. 96/235[7]

Zadání:

Najděte celá čísla x, pro která je výraz $x^2 - 14x - 256$ čtvercem.

Vypracování:

Máme zjistit, pro která x je výraz $x^2 - 14x - 256$ roven mocnině celého čísla. Rovnicí zapsáno

$$x^2 - 14x - 256 = y^2$$

po úpravě

$$x^2 - 14x - 256 - y^2 = 0.$$

Řešíme tedy kvadratickou rovnici, jejíž kořeny mají byt z množiny celých čísel. Vypočítejme kořeny kvadratické rovnice:

$$x^2 - 14x - \left(256 + y^2\right) = 0 \qquad (1)$$

$$x_{12} = \frac{14 \pm \sqrt{196 + 4 \cdot \left(256 + y^2\right)}}{2} = 7 \pm \sqrt{\frac{1220 + 4y^2}{4}} = 7 \pm \sqrt{305 + y^2},$$

má-li platit $x_{12} \in Z$, pak nutně výraz $\sqrt{305 + y^2}$ musí být celočíselný. Proto se snažme najít číslo y takové, které vyhovuje podmínce. K tomuto účelu zaveďme proměnnou z, pro níž platí:

$$305 + y^2 = z^2 \qquad z \in Z \quad (2),$$

a tedy

$$z^2 - y^2 = 305$$
$$(z - y)(z + y) = 305.$$

Součinem hodnot výrazů v závorkách, $(z - y)(z + y)$, mohou být právě jen dělitelé čísla 305[8], tj. $\{1,5,61,305\}$[9]. Mohou tedy nastat čtyři případy, zapišme je:

$$z + y = 1 \wedge z - y = 305 \Rightarrow z^2 = 305 - 304y - y^2 \qquad (3)$$
$$z - y = 1 \wedge z + y = 305 \Rightarrow z^2 = 305 + 304y - y^2 \qquad (4)$$
$$z + y = 5 \wedge z - y = 61 \Rightarrow z^2 = 305 - 56y - y^2 \qquad (5)$$
$$z - y = 5 \wedge z + y = 61 \Rightarrow z^2 = 305 + 56y - y^2 \qquad (6)$$

Případy kdy se výrazy rovnají $\{-1,-5,-61,-305\}$ vedou ke stejným závěrům[10].

V dalším kroku již můžeme bezpečně určit hodnoty čísla y z rovnic $(2-5)$:

$$305 + y_{12}^2 = 305 \pm 304y_{12} - y_{12}^2 \qquad 305 + y_{34}^2 = 305 \pm 56y_{34} - y_{34}^2$$
$$2y_{12}^2 = \pm 304y_{12} \qquad 2y_{34}^2 = \pm 56y_{34}$$
$$y_{12} = \pm 152 \qquad y_{34} = \pm 28$$

---

[7] *U.S.Davydov, Š.Znám: Teória čísel. SPN Bratislava 1966*
[8] plyne z podmínky řešení v oboru celých čísel
[9] prvočíselný rozklad - 305 = 5. 61
[10] nutno zmínit pro hodnocení výborně (oprava 11.4.2001)

Posledním krokem výpočtu je zpětné dosazení právě zjištěných hodnot do rovnice (1):

$$\begin{aligned} x_{12} &= 7 \pm \sqrt{305 + 152^2} = 7 \pm 153 \Rightarrow x_1 = 160,\ x_2 = -146 \\ x_{34} &= 7 \pm \sqrt{305 + 28^2} = 7 \pm 33 \Rightarrow x_3 = 40,\ x_4 = -26 \end{aligned}.$$

Výraz $x^2 - 14x - 256$ je čtvercem pro $x \in \{-146, -26, 40, 160\}$.

Čtvrtá z úloh doporučené literatury str. 98/257[11]

Zadání:

Najděte několik celočíselných řešení rovnice $x^2 - 3y^2 = 1$, když známe řešení $x = 2,\ y = 1$.

Vypracování:

Je zadána „*Pellova rovnice*“, tj. rovnice tvaru $x^2 - Dy^2 = 1 \quad (1)$. V našem případě není D druhou mocninou celého čísla, a proto má rovníce nekonečně mnoho řešení[12]. Pro nalezení dalších řešení rovnice budeme tedy postupovat tradičním způsobem.
Nejprve rozložíme kvadratický dvojčlen:

$$x^2 - 3y^2 = 1$$
$$\left(x - \sqrt{3}y\right)\left(x + \sqrt{3}y\right) = 1$$

a poté použijeme buď větu: *Nechť (x_0, y_0) je řešením rovnice $x^2 - Dy^2 = 1$, potom je řešením i dvojice (x, y), kterou dostaneme z rovnice*

$$x + \sqrt{D}y = \left(x_0 + \sqrt{3}y_0\right)^k,$$

kde k je libovolné celé číslo.

$$\begin{aligned}
\left(2 + 1\sqrt{3}\right)^2 &= 7 + 4\sqrt{3} &&\Rightarrow x_1 = 7,\ y_1 = 4\\
\left(2 + 1\sqrt{3}\right)^3 &= 26 + 15\sqrt{3} &&\Rightarrow x_2 = 26,\ y_2 = 15\\
\left(2 + 1\sqrt{3}\right)^4 &= 97 + 56\sqrt{3} &&\Rightarrow x_3 = 97,\ y_3 = 56\\
&\vdots
\end{aligned}$$

nebo větu: *Když $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ jsou dvě řešení rovnice, potom je řešením i (x, y), kde*

$$x = x_1 x_2 + D y_1 y_2, \quad y = y_1 x_2 + x_1 y_2.$$

$$\text{např.} \quad \begin{aligned} x_2' &= 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 \cdot 4 = 26 \\ y_2' &= 1 \cdot 7 + 2 \cdot 4 = 15 \end{aligned}.$$

Obdobně bychom získali další řešení. Jelikož jsou proměnné v rovnici umocněny na sudý exponent, záleží na znaménku[13].
Několik řešení: $(x, y) \in \{(1,2), (-1,2), (1,-2), (-1,-2), (4,7), (-4,7), (4,-7), (-4,-7) \ldots\}$[14]

---

[11] *U.S.Davydov, Š.Znám: Teória čísel. SPN Bratislava 1966*
[12] Věta: Když *D* není druhou mocninou celého čísla, pak má rovnice (1) nekonečně mnoho řešení.
[13] „Ošidili bychom se“ o řešení
[14] K hodnocení výborně je nutno vypsat i jiná řešení, nechám e čtenáři. (oprava 11.4.2001)

Pátá z úloh doporučené literatury str. 168/cvič. 1.2.(iv)[15]

Zadání:

Dokažte, že pro libovolné $n \in N$ platí:

$$64 \mid 3^{2n+3} + 40n - 27$$

Vypracování:

Důkaz provedeme matematickou indukcí.
Pro $n_0 = 1$ výraz zřejmě platí

$$3^{2\cdot 1+3} + 40 \cdot 1 - 27 = 256 \Rightarrow 64 \mid 3^{2\cdot 1+3} + 40 \cdot 1 - 27$$

Chceme dokázat platnost indukce

$$64 \mid 3^{2k+3} + 40k - 27 \Rightarrow 64 \mid 3^{2(k+1)+3} + 40(k+1) - 27 \quad k \in N$$

Předpokládejme nyní, že pro nějaké $k \in N$ platí

$$64 \mid 3^{2k+3} + 40k - 27 ,$$

tedy

$$\begin{aligned} 3^{2k+3} + 40k - 27 &= 64a \\ 3^{2k+3} &= 64a - 40k + 27 \end{aligned}.$$

Potom

$$3^{2(k+1)+3} + 40(k+1) - 27 = 3^{2k+5} + 40k + 40 - 27 = 3^{2k+3} \cdot 9 + 40k + 13 = 64b$$

a po substituci

$$\begin{aligned} (64a - 40k + 27) \cdot 9 + 40k + 13 &= 64b \\ 576a - 320k + 256 &= 64b \\ 64(9a - 5k + 4) &= 64b \end{aligned}$$

Obě strany rovnosti jsou násobkem 64, čímž je dokázáno $64 \mid 3^{2n+3} + 40n - 27$.

DŮKAZ JE PROVEDEN CHYBNĚ, OPRAVU PONECHÁVÁM NA ČTENÁŘI. (oprava 11.4.2001)

---

[15] *J.Herman, R.Kučera, J.Šimsa: Metody řešení matematických úloh I. SPN Praha 1990*

Šestá z úloh doporučené literatury str. 390/cvič. 8.2.(iv)[16]

Zadání:

Nalezněte trojciferné číslo n^2 takové, že součin jeho číslic je $n-1$.

Vypracování:

Hledáme tedy číslo n pro které platí:

$$100a+10b+1c=n^2 \wedge abc=n-1, \quad 1<a\le 9 \wedge 1\le b,c\le 9$$

Číslo n^2 je trojciferné z čehož plyne, že n je dvoumístné. Může být nejméně 10 a nejvýše 31. Můžeme postupovat i tak, že pracně vypíšeme tabulku hodnot:

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n^2	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400
abc	2	16	54	54	20	60	144	24	18	0

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
441	484	529	576	625	676	729	784	841	900	961
16	128	90	210	60	252	126	224	32	0	54

Tento způsob řešení je pracný, ale přesvědčivý. Hledané číslo je 361.

---

16 *J.Herman, R.Kučera, J.Šimsa: Metody řešení matematických úloh I. SPN Praha 1990*

"Úloha navíc"

Zadání:

Najděte poslední číslici čísla $A = 4^{1234567}$.

Vypracování:

Řešení I

Indukcí dokážeme, že pro každé $n \in N$ končí 4^{2n+1} číslovkou 4. Pro $n = 0$ to zřejmě platí. Když už víme, že 4^{2n+1} končí číslovkou 4, tj. že platí $4^{2n+1} \equiv 4(\mathrm{mod}\,10)$, tak lehko zjistíme

$$4^{2(n+1)+1} = 4^{2n+1} \cdot 16 \equiv 4 \cdot 6 \equiv 4(\mathrm{mod}\,10)$$

tedy i $4^{2(n+1)+1}$ končí číslovkou 4. Tím je důkaz indukcí ukončený. Podle právě dokázaného tvrzení, které použijeme pro $n = \left[\frac{1234567}{2}\right] = 617283$, končí i A číslicí 4.

Řešení II

Dokážeme, že $10|(A-4)$. Protože A je sudé, platí $2|(A-4)$, a je třeba ještě dokázat $5|(A-4)$. Počítejme modulo 5

$$A - 4 \equiv (-1)^{1234567} - 4 = -1 - 4 = -5 \equiv 0(\mathrm{mod}\,5),$$

tedy skutečně $5|(A-4)$. Proto $10|(A-4)$, a tedy A končí číslovkou 4.

U tohoto příkladu z knihy *I.Korec: Úlohy o veľkých číslach. ÚV matematické olympiády Praha 1988, str. 58, úloha 5.1.* mě nejvíce zaujal dovětek, v němž se praví „*Táto úloha bola taká ľahká, že ju čitateľ zaiste vedel vyriešiť spamäti*." Po přečtení řešení dávám autorovi za pravdu. Proto mne úloha zaujala, a přivedla k zamyšlení, u kterých dalších základních číslovek mají mocniny periodicky se měnící dvě cifry na místě jednotek (Odpověď: konstantní zůstávají mocniny čísel *5,6,10,11* a po dvou se střídají u *4,14*).

“Úloha navíc II“

Zadání:

Zjistěte na kolik nul končí číslo $2001!$.

Vypracování:

Exponent prvočísla 5 v rozkladu čísla $2001!$ je

$$\left[\frac{2001}{5}\right]+\left[\frac{2001}{25}\right]+\left[\frac{2001}{125}\right]+\left[\frac{2001}{625}\right]=400+80+16+3=499,$$

exponent prvočísla 2 je větší (například proto, že $\left[\frac{2001}{2}\right]>499$). Proto $2001!$ je dělitelné číslem 10^{499}, ale ne 10^{500}, a proto končí (v dekadickém zápise) 499 nulami.

Námětem k této úloze mi byla úloha 8.3.[17] v knize „O velkých číslech“. V této knize jsou zajímavé, řekl bych někdy až zábavné úlohy, jejichž řešení jsou někdy překvapivě snadná.

Obsah

[17] *I.Korec: Úlohy o veľkých číslach. ÚV matematické olympiády Praha 1988, str. 88, úloha 8.4.*