Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

SEMINÁRNÍ PRÁCE Z METOD ŘEŠENÍ ÚLOH

ROVNICE, NEROVNICE A JEJICH SOUSTAVY

CIFRIK C.

Úloha 1 [kvadratická rovnice s kořeny y_1=x_1^2+x_2^2, y_2=x_1^3+x_2^3]

Je dána kvadratická rovnice $x^2 + px + q = 0$ s kořeny x_1, x_2. Sestavte kvadratickou rovnici, která má kořeny $y_1 = x_1^2 + x_2^2$, $y_2 = x_1^3 + x_2^3$.

Vypracování

Pro kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice $x^2 + px + q = 0$ platí Viètovy vzorce:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p \\ x_1 x_2 &= q \end{aligned}$$

Na základě těchto vztahů si vyjádříme kořeny y_1, y_2 pomocí p a q:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q \\ y_2 &= x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = \\ &= -p(p^2 - 3q) = 3pq - p^3 \end{aligned}$$

a z takto vyjádřených kořenů sestavíme hledanou rovnici:

$$\begin{aligned} (y - y_1)(y - y_2) &= (y - p^2 + 2q)(y + p^3 - 3pq) = \\ &= y^2 + (p^3 - p^2 - 3pq + 2q)y - p^5 + 5p^3q - 6pq^2 \end{aligned}$$

Závěr

Hledaná kvadratická rovnice má tvar:

$$y^2 + (p^3 - p^2 - 3pq + 2q)y - p^5 + 5p^3q - 6pq^2 = 0$$

Úloha 2 [x+y=4, (x^2+y^2)(x^3+y^3)=280]

Řešte soustavu: $x + y = 4$, $(x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280$.

Vypracování

Úpravy druhé rovnice volíme tak, abychom získali výraz obsahující levou stranu první rovnice:

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)(x^3 + y^3) &= ((x + y)^2 - 2xy)\big((x + y)(x^2 - xy + y^2)\big) = \\ &= ((x + y)^2 - 2xy)(x + y)((x + y)^2 - 3xy) = 280\end{aligned}$$

Nyní dosadíme první rovnici do druhé:

$$(4^2 - 2xy)4(4^2 - 3xy) = 280$$

$$\begin{aligned}256 - 48xy - 32xy + 6x^2y^2 &= 70 \\ 3(xy)^2 - 40xy + 93 &= 0 \\ \left(xy - \frac{31}{3}\right)(xy - 3) &= 0\end{aligned}$$

Úloha se nám tak rozděluje do dvou případů:

a) $x + y = 4 \wedge xy - \frac{31}{3} = 0$: Soustava vede ke kvadratické rovnici $3x^2 - 12x + 31 = 0$, která má záporný diskriminant, a proto je řešení z oboru komplexních čísel $x_{12} = \frac{6 \pm i\sqrt{57}}{3}$

b) $x + y = 4 \wedge xy - 3 = 0$: Soustava vede ke kvadratické rovnici $x^2 - 4x + 3 = 0$, tj. $(x - 1)(x - 3) = 0$, tedy $x_{34} \in \{1,3\}$.

Závěr

Zadaná soustava má čtyři řešení:

$$[x, y] \in \left\{[1,3], [3,1], \left[\frac{6 - i\sqrt{57}}{3}, \frac{6 + i\sqrt{57}}{3}\right], \left[\frac{6 + i\sqrt{57}}{3}, \frac{6 - i\sqrt{57}}{3}\right]\right\}$$

Úloha 3 [x+y+z=3, x^3+y^3+z^3=27]

Řešte soustavu: $x + y + z = 3, x^3 + y^3 + z^3 = 27$

Vypracování

Možným klíčem k řešení je rozklad třetí mocniny trojčlenu:

$$\begin{aligned}
&(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3y^2x + 3y^2z + 3z^2x + 3z^2y + 6xyz = \\
&= x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2y + x^2z + xyz + xz^2 + xy^2 + xyz + y^2z + yz^2) = \\
&= x^3 + y^3 + z^3 + 3\big(x(xy + xz + yz + z^2) + y(xy + xz + yz + z^2)\big) = \\
&= x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(xy + xz + yz + z^2) = \\
&= x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)\big(x(y+z) + z(y+z)\big) = \\
&= x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z)
\end{aligned}$$

který užijeme pro dosazení první rovnice do druhé

$$x^3 + y^3 + z^3 = \underbrace{(x+y+z)^3}_{3^3} - \underbrace{3(x+y)(x+z)(y+z)}_{0} = 27$$

čímž se nám úloha rozdělí do třech větví:

$$\begin{matrix} x+y+z=3 \\ x+y=0 \end{matrix} \vee \begin{matrix} x+y+z=3 \\ x+z=0 \end{matrix} \vee \begin{matrix} x+y+z=3 \\ y+z=0 \end{matrix}$$

Vyřešit stačí jednu z nich a u ostatních provést cyklickou záměnu:

$$\begin{matrix} x+y+z=3 \\ x+y=0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} \\ y=-x \end{matrix}\right\} z = 3, x = t, y = -t$$

Závěr

Řešením jsou trojice:

$$[x, y, z] \in \{[3, t, -t], [t, 3, -t], [t, -t, 3], t \in \mathbb{R}\}$$

Úloha 4 [3x^2+15x+2√(x^2+5x+1)=2]

Řešte rovnici pomocí vhodné substituce: $3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2$

Vypracování

Rovnici upravíme na tvar

$$3(x^2 + 5x + 1) + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} - 5 = 0$$

Tím dostaneme v závorce i pod odmocninou stejný kvadratický trojčlen. Položíme-li nyní substituci

$$\sqrt{x^2 + 5x + 1} = y$$

je $x^2 + 5x + 1 = y^2$ a poslední rovnice o neznámé x přejde na tuto rovnici o neznámé y:

$$3y^2 + 2y - 5 = 0$$

To je kvadratická rovnice s kořeny $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{5}{3}$. Pomocí naší substituce přejdeme opět k původní neznámé. Máme dva případy:

a) $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 1$. Umocněním obou stran této rovnice na druhou dostaneme
$$x^2 + 5x + 1 = 1$$
tj. ryze kvadratickou rovnici
$$x^2 + 5x = 0$$
s kořeny $x_1 = 0$, $x_2 = -5$.

b) $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = -\frac{5}{3}$. V tomto případě neexistuje žádné reálné x, pro něž by se tato odmocnina rovnala zápornému číslu.

Závěr

Zkouškou se přesvědčíme, že nalezená čísla $x_1 = 0$, $x_2 = -5$ jsou kořeny dané rovnice.

Úloha 5 [x+y+z=0, x^2+y^2-z^2=20, x^4+y^4-z^4=560]

Řešte soustavu: $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = 20$, $x^4 + y^4 - z^4 = 560$.

Vypracování

Z první rovnice vyjádříme $z = -(x + y)$ a dosadíme do druhé rovnice:

$$x^2 + y^2 - (x^2 + 2xy + y^2) = 20$$
$$xy = -10$$

Obdobně za z dosadíme do třetí rovnice:

$$x^4 + y^4 - (x + y)^4 = 560$$
$$x^4 + y^4 = 560 + x^4 + 4x^3y + 6\underbrace{(xy)^2}_{100} + 4xy^3 + y^4$$
$$-4x^3y - 4xy^3 = 1160$$
$$\underbrace{-4xy}_{40}(x^2 + y^2) = 1160$$
$$x^2 + y^2 = 29$$

Doplníme na čtverec

$$\underbrace{x^2 + 2xy + y^2}_{z^2} = 29 + \underbrace{2xy}_{-20}$$

$$z^2 = 9$$

a získáváme hodnoty $z_1 = -3$, $z_2 = 3$

Pro $z_1 = -3$, řešíme soustavu $x_1 + y_1 = 3$, $x_1y_1 = -10$, která vede ke kvadratické rovnici $x_1^2 - 3x_1 - 10 = 0$, mající kořeny $x_{1a} = 5, x_{1b} = -2$ a k nim odpovídající hodnoty y jsou $y_{1a} = -2, y_{1b} = 5$.

Pro $z_2 = 3$, řešíme soustavu $x_2 + y_2 = 3$, $x_2y_2 = -10$, která vede ke kvadratické rovnici $x_2^2 + 3x_2 - 10 = 0$, mající kořeny $x_{2a} = -5$, $x_{2b} = 2$ a k nim odpovídající hodnoty y jsou $y_{2a} = 2, y_{2b} = -5$.

Závěr

Soustava má čtyři řešení:

$$[x, y, z] \in \{[-5,2,3], [-2,5,-3], [2,-5,3], [5,-2,-3]\}$$

Úloha 6 [√((2x+1)/(x-1))-2√((x-1)/(2x+1))=1]

Řešte pomocí vhodné substituce: $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}-2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}}=1$.

Vypracování

Nejprve určíme množinu hodnot, pro které má výraz smysl.

$$x\neq 1\wedge x\neq -\frac{1}{2}\wedge\left(\left(x-1>0\wedge 2x+1>0\right)\vee\left(x-1<0\wedge 2x+1<0\right)\right)\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup(1;\infty)$$

V rovnici

$$\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}-2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}}=1$$

substituujeme například $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}=t$, a tím se nám zápis původní rovnice zjednoduší do tvaru:

$$t-\frac{2}{t}=1$$
$$t^2-t-2=0$$
$$(t+1)(t-2)=0$$

Po zpětné substituci

$$\left(\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}+1\right)\left(\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}-2\right)=0$$

Výraz v první závorce je vždy kladný, proto kořen rovnice $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}-2=0$ je jediným řešením:

$$\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}-2=0$$
$$\frac{2x+1}{x-1}=4$$
$$2x+1=4x-4$$
$$2x=5$$
$$x=\frac{5}{2}$$

Závěr

Rovnice $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}-2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}}=1$ má řešení $x=\frac{5}{2}$.

Úloha 7 [x_1+x_2+x_3=6, x_2+x_3+x_4=9, x_3+x_4+x_5=3, x_4+x_5+x_6=-3...]

Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 9 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \\ x_4 + x_5 + x_6 &= -3 \\ x_5 + x_6 + x_7 &= -9 \\ x_6 + x_7 + x_8 &= -6 \\ x_1 + x_7 + x_8 &= -2 \\ x_2 + x_2 + x_8 &= 2 \end{aligned}$$

Vypracování

Rovnice soustavy jsou zřejmě lineárně nezávislé a determinant matice kterou tvoří, je různý od nuly. Soustava má tedy právě jedno řešení. Vyřešíme jí pomocí vhodně zvolených, na soustavě lineárně závislých rovnic.

Nejprve určíme součet všech rovnic:

$$\begin{aligned} 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8) &= 6 + 9 + 3 - 3 - 9 - 2 + 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &= 0 \end{aligned}$$

a potom součet první, čtvrté a sedmé rovnice:

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 1$$

Odečtením těchto součtových rovnic určíme hodnotu neznámé x_1

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + \cdots + x_8 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_8) &= 1 - 0 \\ x_1 &= 1 \end{aligned}$$

Obdobně vypočteme hodnotu neznámé x_2 pomocí součtu druhé, páté a osmé rovnice zadané soustavy:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \cdots + x_8 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_8) &= 2 - 0 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Ostatní neznáme dopočteme postupným dosazením do prvních šesti rovnic soustavy a kontrolou správnosti dosazením do posledních dvou.

Závěr

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (1,2,3,4,-4,-3,-2,-1)$$

Úloha 8 [x(a+4)+a(x+2)=2]

Řešte v oboru celých čísel x rovnici

$$x(a+4)+a(x+2)=2$$

kde a je celé číslo.

Vypracování

Nejprve si rovnici upravíme

$$\begin{aligned} x(a+4)+a(x+2)&=2\\ ax+4x+ax+2a&=2\\ 4x+2ax&=2-2a\\ 2x+ax&=1-a\\ x&=\frac{1-a}{2+a}\end{aligned}$$

Úpravou jsme omezili obor parametru a, $a\in\mathbb{Z}-\{-2\}$. Pro $a=-2$ zadaná rovnice nemá řešení o čemž se přesvědčíme dosazením

$$\begin{aligned} x(-2+4)-2(x+2)&=2\\ 2x-2x&=6\\ 0x&=6\end{aligned}$$

Má-li být x celé, musí být celočíselný i výraz $\frac{1-a}{2+a}$.

Úpravou

$$\frac{1-a}{2+a}=-\frac{a-1}{a+2}=-\frac{a+2-3}{a+2}=-1+\frac{3}{a+2}$$

zjistíme, že podmínka je splněna právě tehdy, když je celočíselný výraz $\frac{3}{a+2}$.

Tomu vyhovují $a\in\{-5,-3,-1,1\}$.

Závěr

Rovnice $x(a+4)+a(x+2)=2$ má tedy v oboru celých čísel jen čtyři řešení závislá na parametru a. Přehledně je zapíšeme do tabulky:

a	-5	-3	-1	1
x	-2	-4	2	0

Úloha 9 [(ax-6)/(ax+6a)=1/a]

Řešte v oboru reálných čísel x rovnici $\frac{ax-6}{ax+6a} = \frac{1}{a}$, kde a je reálné číslo.

Vypracování

Za podmínek, že $a \neq 0, x \neq -6$ můžeme rovnici upravovat

$$\frac{ax-6}{ax+6a} = \frac{1}{a}$$
$$a^2x - 6a = ax + 6a$$
$$x(a^2 - a) = 12a$$
$$x = \frac{12a}{a(a-1)} = \frac{12}{a-1}$$

Tímto vyjádřením x jsme vyloučili případ kdy $a = 1$. Tuto hodnotu parametru a vyšetříme dosazením do původního tvaru rovnice:

$$\frac{x-6}{x+6} = 1$$
$$x - 6 = x + 6$$
$$0x = 12$$

Poslední rovnost nemá v množině reálných čísel řešení.

Zbývá prošetřit pro která a není splněna podmínka $x \neq -6$:

$$\frac{12}{a-1} = -6$$
$$a = -1$$

Hodnotu parametru $a = -1$ opět vyšetříme dosazením do původní rovnice:

$$\frac{-x-6}{-x+6(-1)} = \frac{1}{-1}$$
$$1 = -1$$

Což neplatí a rovnice pro tuto hodnotu parametru nemá řešení.

Závěr

Rovnice $\frac{ax-6}{ax+6a} = \frac{1}{a}$ má v závislosti na parametru a tato řešení:

- Pro $a = 0$ výraz v rovnici nedává smysl
- Pro $a \in \{-1,1\}$ rovnice nemá řešení
- Pro všechna ostatní a, tj. $a \in \mathbb{R} - \{-1,0,1\}$ je řešením $x = \frac{12}{a-1}$

Úloha 10 [slovní úloha s celými čísly]

Chodec vyšel ve 4 hodiny ráno průměrnou rychlostí 5 km.h^{-1} a po každých čtyřech kilometrech odpočívá. Každá přestávka trvá 10 minut, kromě čtvrté, která trvá hodinu. Určete, jakou vzdálenost ušel, jestliže do cíle své cesty přišel v poledne téhož dne.

Vypracování

Úlohu lze poměrně jednoduše vyřešit tak, že na časovou osu s vyznačenými hodinovými údaji postupně zakreslíme jednotlivé zastávky. Pro zajímavost ji však vyřešíme rovnicí.

Označme x vzdálenost (v kilometrech), kterou chodec celkem ušel; platí potom:

- počet zastávek je $\left[\frac{x}{4}\right]$
- celková doba trvání všech zastávek v hodinách je $\left(\left[\frac{x}{4}\right]-1\right)\frac{1}{6}+1$
- čistá doba chůze v hodinách je jednak $\frac{x}{5}$, jednak $8-\left(\left(\left[\frac{x}{4}\right]-1\right)\frac{1}{6}+1\right)$

Dostáváme tak rovnici $8-\frac{1}{6}\left(\left[\frac{x}{4}\right]+5\right)=\frac{x}{5}$, kterou upravíme na tvar $\left[\frac{x}{4}\right]=-\frac{6x}{5}+43$.

Vyřešíme tuto rovnici. Podle definice celé části reálného čísla musí platit:

$$43-\frac{6x}{5}=\frac{215-6x}{5}\in Z \wedge \frac{x}{4}\geq\frac{215-6x}{5} \wedge \frac{x}{4}<\frac{215-6x}{5}+1$$

Zjistíme, že oběma nerovnicím vyhovují právě všechna $x\in\left\langle\frac{860}{29},\frac{880}{29}\right)$. Jde nyní o to určit v tomto intervalu všechna čísla x, pro něž je číslo $\frac{215-6x}{5}$ celé. Z této podmínky, kterou zapíšeme ve tvaru

$$\frac{215-6x}{5}=k,\quad k\in Z,$$

dostáváme

$$x=\frac{215-5k}{6}=\frac{6235-145k}{174}.$$

Odtud je vidět, že číslo x je z intervalu $\left\langle\frac{5160}{174},\frac{5280}{174}\right)$ jedině pro $k=7$, odkud je

$x=\frac{215-35}{6}=30$. Máme tak výsledek:

Chodec ušel 30km.

Zkouška

$\left[\frac{30}{4}\right] = 7$ chodec měl tedy sedm přestávek. Bylo-li jich šest desetiminutových a jedna hodinová, odpočíval dohromady dvě hodiny. Šel-li průměrnou rychlostí 5 $km.h^{-1}$, pak 30 kilometrů zdolal za šest hodin. Součet doby přestávek a chůze je stejný s časem, který strávil na cestách.

QED

Obsah