**Univerzita Karlova v Praze**

**Pedagogická fakulta**

SEMINÁRNÍ PRÁCE Z METOD ŘEŠENÍ ÚLOH

**ROVNICE, NEROVNICE A JEJICH SOUSTAVY**

**CIFRIK C.**

# Úloha 1 [kvadratická rovnice s kořeny y\_1=x\_1^2+x\_2^2, y\_2=x\_1^3+x\_2^3]

Je dána kvadratická rovnice s kořeny , . Sestavte kvadratickou rovnici, která má kořeny , .

Vypracování

Pro kořeny , kvadratické rovnice platí Viètovy vzorce:

Na základě těchto vztahů si vyjádříme kořeny , pomocí a :

a z takto vyjádřených kořenů sestavíme hledanou rovnici:

Závěr

Hledaná kvadratická rovnice má tvar:

# Úloha 2 [x+y=4, (x^2+y^2)(x^3+y^3)=280]

Řešte soustavu: , .

Vypracování

Úpravy druhé rovnice volíme tak, abychom získali výraz obsahující levou stranu první rovnice:

Nyní dosadíme první rovnici do druhé:

Úloha se nám tak rozděluje do dvou případů:

1. : Soustava vede ke kvadratické rovnici , která má záporný diskriminant, a proto je řešení z oboru komplexních čísel
2. : Soustava vede ke kvadratické rovnici , tj. , tedy .

Závěr

Zadaná soustava má čtyři řešení:

# Úloha 3 [x+y+z=3, x^3+y^3+z^3=27]

Řešte soustavu: ,

Vypracování

Možným klíčem k řešení je rozklad třetí mocniny trojčlenu:

 který užijeme pro dosazení první rovnice do druhé

čímž se nám úloha rozdělí do třech větví:

Vyřešit stačí jednu z nich a u ostatních provést cyklickou záměnu:

Závěr

Řešením jsou trojice:

# Úloha 4 [3x^2+15x+2√(x^2+5x+1)=2]

Řešte rovnici pomocí vhodné substituce:

Vypracování

Rovnici upravíme na tvar

Tím dostaneme v závorce i pod odmocninou stejný kvadratický trojčlen. Položíme-li nyní substituci

je a poslední rovnice o neznámé přejde na tuto rovnici o neznámé :

To je kvadratická rovnice s kořeny , . Pomocí naší substituce přejdeme opět k původní neznámé. Máme dva případy:

1. . Umocněním obou stran této rovnice na druhou dostaneme
tj. ryze kvadratickou rovnici
s kořeny , .
2. . V tomto případě neexistuje žádné reálné , pro něž by se tato odmocnina rovnala zápornému číslu.

Závěr

Zkouškou se přesvědčíme, že nalezená čísla , jsou kořeny dané rovnice.

# Úloha 5 [x+y+z=0, x^2+y^2-z^2=20, x^4+y^4-z^4=560]

Řešte soustavu: , , .

Vypracování

Z první rovnice vyjádříme a dosadíme do druhé rovnice:

Obdobně za dosadíme do třetí rovnice:

Doplníme na čtverec

a získáváme hodnoty ,

Pro , řešíme soustavu , , která vede ke kvadratické rovnici
, mající kořeny a k nim odpovídající hodnoty jsou .

Pro , řešíme soustavu , , která vede ke kvadratické rovnici
, mající kořeny , a k nim odpovídající hodnoty jsou .

Závěr

Soustava má čtyři řešení:

# Úloha 6 [√((2x+1)/(x-1))-2√((x-1)/(2x+1))=1]

Řešte pomocí vhodné substituce: .

Vypracování

Nejprve určíme množinu hodnot, pro které má výraz smysl.



V rovnici

substituujeme například , a tím se nám zápis původní rovnice zjednoduší do tvaru:

Po zpětné substituci

Výraz v první závorce je vždy kladný, proto kořen rovnice je jediným řešením:

Závěr

Rovnice má řešení .

# Úloha 7 [x\_1+x\_2+x\_3=6, x\_2+x\_3+x\_4=9, x\_3+x\_4+x\_5=3, x\_4+x\_5+x\_6=-3...]

Řešte soustavu rovnic:

Vypracování

Rovnice soustavy jsou zřejmě lineárně nezávislé a determinant matice kterou tvoří, je různý od nuly. Soustava má tedy právě jedno řešení. Vyřešíme jí pomocí vhodně zvolených, na soustavě lineárně závislých rovnic.

Nejprve určíme součet všech rovnic:

a potom součet první, čtvrté a sedmé rovnice:

Odečtením těchto součtových rovnic určíme hodnotu neznámé

Obdobně vypočteme hodnotu neznámé pomocí součtu druhé, páté a osmé rovnice zadané soustavy:

Ostatní neznáme dopočteme postupným dosazením do prvních šesti rovnic soustavy a kontrolou správnosti dosazením do posledních dvou.

Závěr

# Úloha 8 [x(a+4)+a(x+2)=2]

Řešte v oboru celých čísel rovnici

kde je celé číslo.

Vypracování

Nejprve si rovnici upravíme

Úpravou jsme omezili obor parametru , . Pro zadaná rovnice nemá řešení o čemž se přesvědčíme dosazením

Má-li být celé, musí být celočíselný i výraz .

Úpravou

zjistíme, že podmínka je splněna právě tehdy, když je celočíselný výraz .

Tomu vyhovují .

Závěr

Rovnice má tedy v oboru celých čísel jen čtyři řešení závislá na parametru . Přehledně je zapíšeme do tabulky:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -5 | -3 | -1 | 1 |
|  | -2 | -4 | 2 | 0 |

# Úloha 9 [(ax-6)/(ax+6a)=1/a]

Řešte v oboru reálných čísel rovnici , kde je reálné číslo.

Vypracování

Za podmínek, že můžeme rovnici upravovat

Tímto vyjádřením jsme vyloučili případ kdy . Tuto hodnotu parametru vyšetříme dosazením do původního tvaru rovnice:

Poslední rovnost nemá v množině reálných čísel řešení.

Zbývá prošetřit pro která není splněna podmínka :

Hodnotu parametru opět vyšetříme dosazením do původní rovnice:

Což neplatí a rovnice pro tuto hodnotu parametru nemá řešení.

Závěr

Rovnice má v závislosti na parametru tato řešení:

* Pro výraz v rovnici nedává smysl
* Pro rovnice nemá řešení
* Pro všechna ostatní , tj. je řešením

# Úloha 10 [slovní úloha s celými čísly]

Chodec vyšel ve 4 hodiny ráno průměrnou rychlostí 5 km.h-1 a po každých čtyřech kilometrech odpočívá. Každá přestávka trvá 10 minut, kromě čtvrté, která trvá hodinu. Určete, jakou vzdálenost ušel, jestliže do cíle své cesty přišel v poledne téhož dne.

Vypracování

Úlohu lze poměrně jednoduše vyřešit tak, že na časovou osu s vyznačenými hodinovými údaji postupně zakreslíme jednotlivé zastávky. Pro zajímavost ji však vyřešíme rovnicí.

Označme  vzdálenost (v kilometrech), kterou chodec celkem ušel; platí potom:

* počet zastávek je 
* celková doba trvání všech zastávek v hodinách je 
* čistá doba chůze v hodinách je jednak , jednak 

Dostáváme tak rovnici , kterou upravíme na tvar .

Vyřešíme tuto rovnici. Podle definice celé části reálného čísla musí platit:



Zjistíme, že oběma nerovnicím vyhovují právě všechna . Jde nyní o to určit v tomto intervalu všechna čísla , pro něž je číslo  celé. Z této podmínky, kterou zapíšeme ve tvaru

,

dostáváme

.

Odtud je vidět, že číslo  je z intervalu  jedině pro , odkud je . Máme tak výsledek:

**Chodec ušel 30km.**

Zkouška

 chodec měl tedy sedm přestávek. Bylo-li jich šest desetiminutových a jedna hodinová, odpočíval dohromady dvě hodiny. Šel-li průměrnou rychlostí 5 km.h-1, pak 30 kilometrů zdolal za šest hodin. Součet doby přestávek a chůze je stejný s časem, který strávil na cestách.

QED

## Obsah

[Úloha 1 [kvadratická rovnice s kořeny y\_1=x\_1^2+x\_2^2, y\_2=x\_1^3+x\_2^3] 2](#_Toc311228505)

[Úloha 2 [x+y=4, (x^2+y^2)(x^3+y^3)=280] 3](#_Toc311228506)

[Úloha 3 [x+y+z=3, x^3+y^3+z^3=27] 4](#_Toc311228507)

[Úloha 4 [3x^2+15x+2√(x^2+5x+1)=2] 5](#_Toc311228508)

[Úloha 5 [x+y+z=0, x^2+y^2-z^2=20, x^4+y^4-z^4=560] 6](#_Toc311228509)

[Úloha 6 [√((2x+1)/(x-1))-2√((x-1)/(2x+1))=1] 7](#_Toc311228510)

[Úloha 7 [x\_1+x\_2+x\_3=6, x\_2+x\_3+x\_4=9, x\_3+x\_4+x\_5=3, x\_4+x\_5+x\_6=-3...] 8](#_Toc311228511)

[Úloha 8 [x(a+4)+a(x+2)=2] 9](#_Toc311228512)

[Úloha 9 [(ax-6)/(ax+6a)=1/a] 10](#_Toc311228513)

[Úloha 10 [slovní úloha s celými čísly] 11](#_Toc311228514)