Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

SEMINÁRNÍ PRÁCE Z METOD ŘEŠENÍ 1

PLANIMETRIE

2000/2001 **Cifrik, M-ZT**

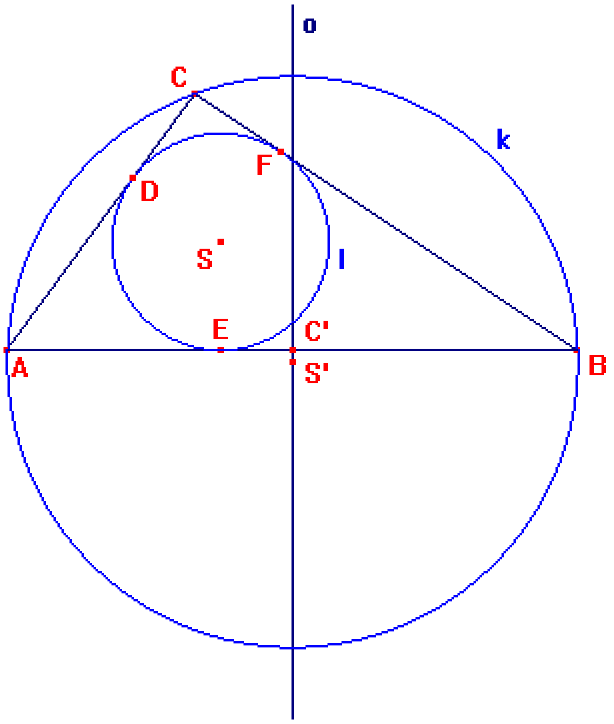
První příklad ze zadávacích listů[1]

Zadání:

Sestrojte trojúhelník ABC, pokud je dáno: $b-a$, r (poloměr kružnice opsané), ρ (poloměr kružnice vepsané).

Vypracování:

Načrtněme si trojúhelník ABC a označme body, kružnice a osu úsečky AB tak, jak je na obrázku[2]:



obr.1

Rozbor:

Pro velikost úsečky EC' platí $|EC'| = \left|\frac{b-a}{2}\right|$, neboť

$$\begin{array}{lll} |AB| = c & |AD| = |AE| = d & |AB| = d + f \\ |BC| = a & |CD| = |CF| = e & |BC| = e + f \\ |AC| = b & |BE| = |BF| = f & |AC| = d + e \end{array}$$

$$2d + 2e + 2f = a + b + c$$

$$2d = a + b + c - 2(e + f)$$

$$d = \frac{a+b+c}{2} - a$$

$$|EC'| = \left||AE| - |AC'|\right| = \left|d - \frac{c}{2}\right| = \left|\frac{a+b+c}{2} - a - \frac{c}{2}\right| = \left|\frac{b-a}{2}\right|.$$

---

[1] Strana 14/ příklad 12

[2] obr. 1 – *A,B,C* vrcholy trojúhelníka; *C'* střed strany *AB*; *o* osa strany *AB*; *S (S')* střed kružnice opsané (vepsané); *k (l)* kružnice opsaná (vepsaná); *D,E,F* dotykové body kružnice vepsané a trojúhelníku *ABC*.

V prvním kroku konstrukce proto narýsujeme úsečku EC' a v krajních bodech kolmice k ní. Na těchto kolmicích leží středy kružnic[3]. Kolmici vedené bodem E náleží střed S kružnice vepsané, kolmici[4] bodem C' střed S' kružnice opsané. Najít střed kružnice vepsané tedy není problém, k určení středu kružnice opsané užijeme vztah

$$|SS'|^2 = (r-\rho)^2 - \rho^2,$$

po úpravě

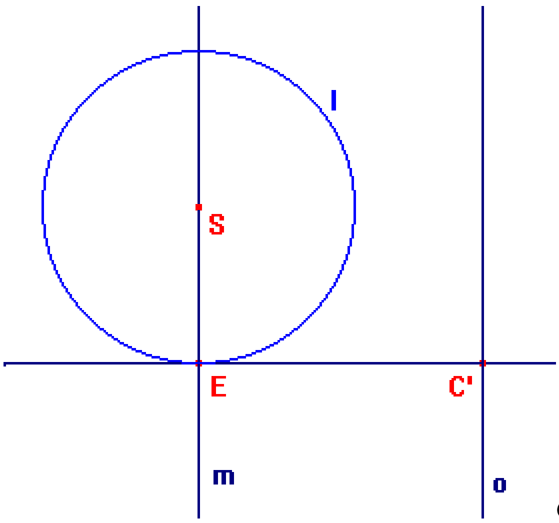
$$|SS'| = \sqrt{r(r-2\rho)}.$$

Středy kružnice opsané jsou v průsečících kružnice s poloměrem $|SS'|$ a středem v bodě S, s osu o. Na počtu těchto průsečíků závisí počet řešení.
Buď mohou být

- dvě ($\sqrt{r(r-2\rho)} > \frac{b-a}{2}$)
- jedno ($\sqrt{r(r-2\rho)} = \frac{b-a}{2}$)
- žádné ($\sqrt{r(r-2\rho)} < \frac{b-a}{2}$).

Postup konstrukce středů kružnic:[5]

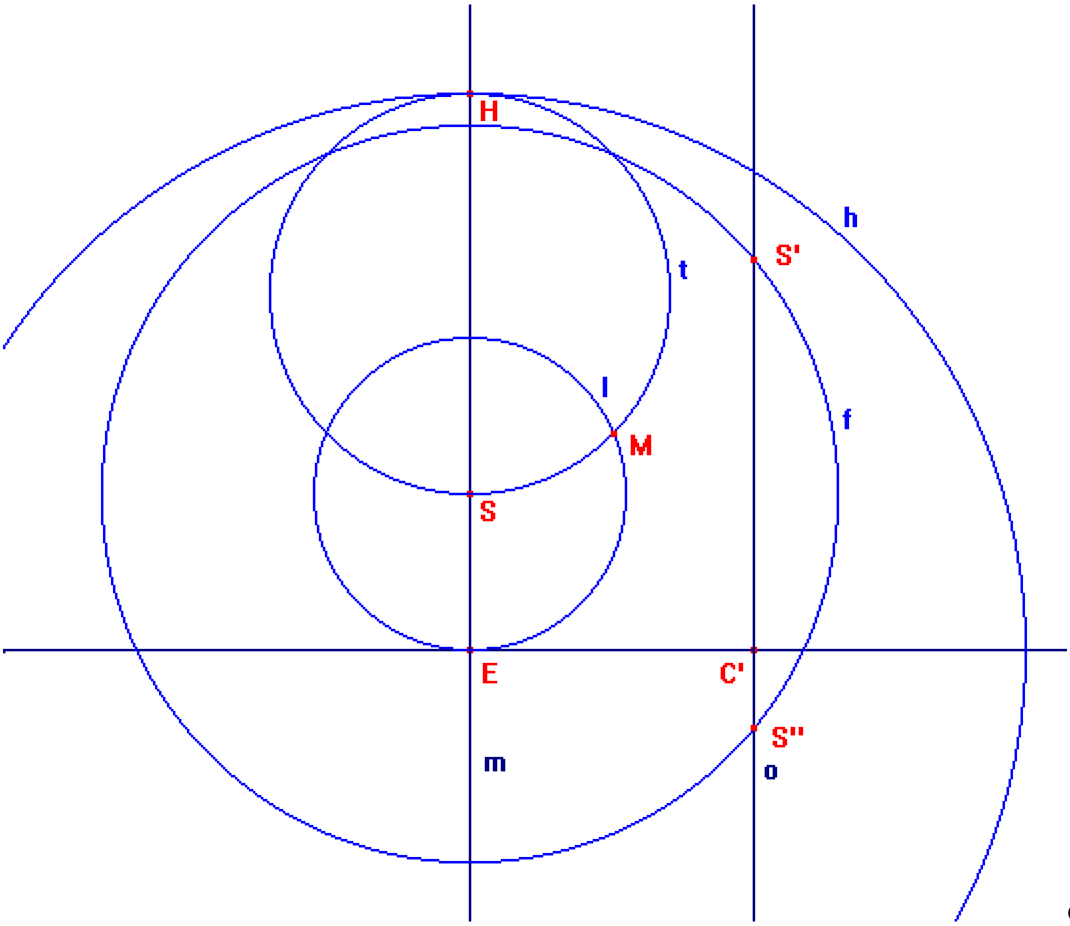
1. $EC'; |EC'| = \left|\frac{b-a}{2}\right|$
2. $p; EC \in p$
3. $m; (m \perp p) \wedge (E \in m)$
4. $o; (o \perp p) \wedge (C' \in o)$
5. $S; (S \in m) \wedge (|SE| = \rho)$
6. $l(S; \rho)$



obr.2

[3] Opsané a vepsané.
[4] Osa úsečky AB.
[5] Dvě velká písmena v zápisu označují úsečku (např. AB je označení úsečky AB.)

7. $h(E;r)$
8. $H;(H \in h \cap m) \wedge (H \neq E)$
9. $t;Tháletova\ kružnice\ nad\ HS$
10. $M;\ M \in t \cap l$
11. $f(S;|HM|)$
12. $S';\ S' \in f \cap o$



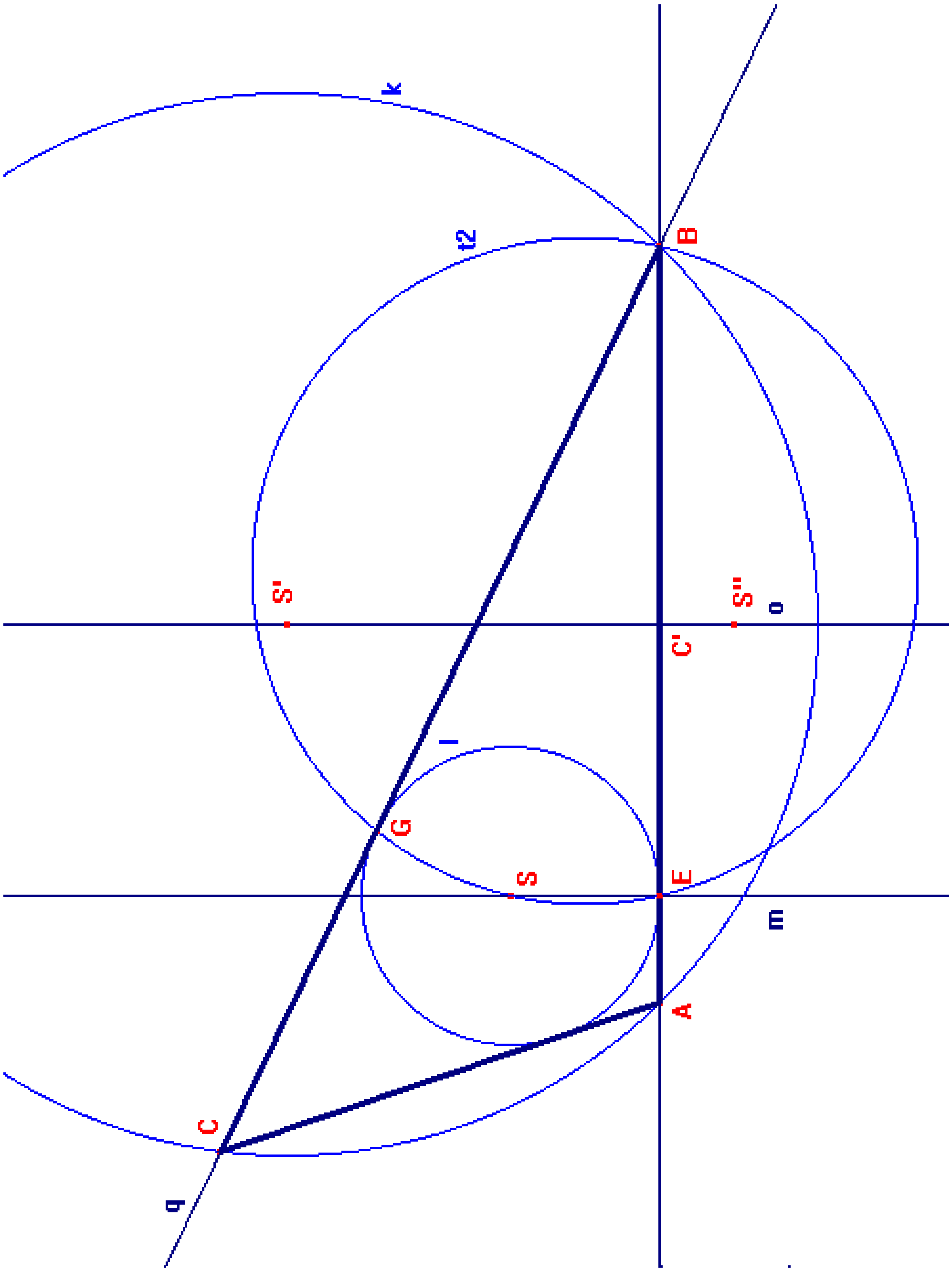
obr.3

Postup konstrukce trojúhelníka

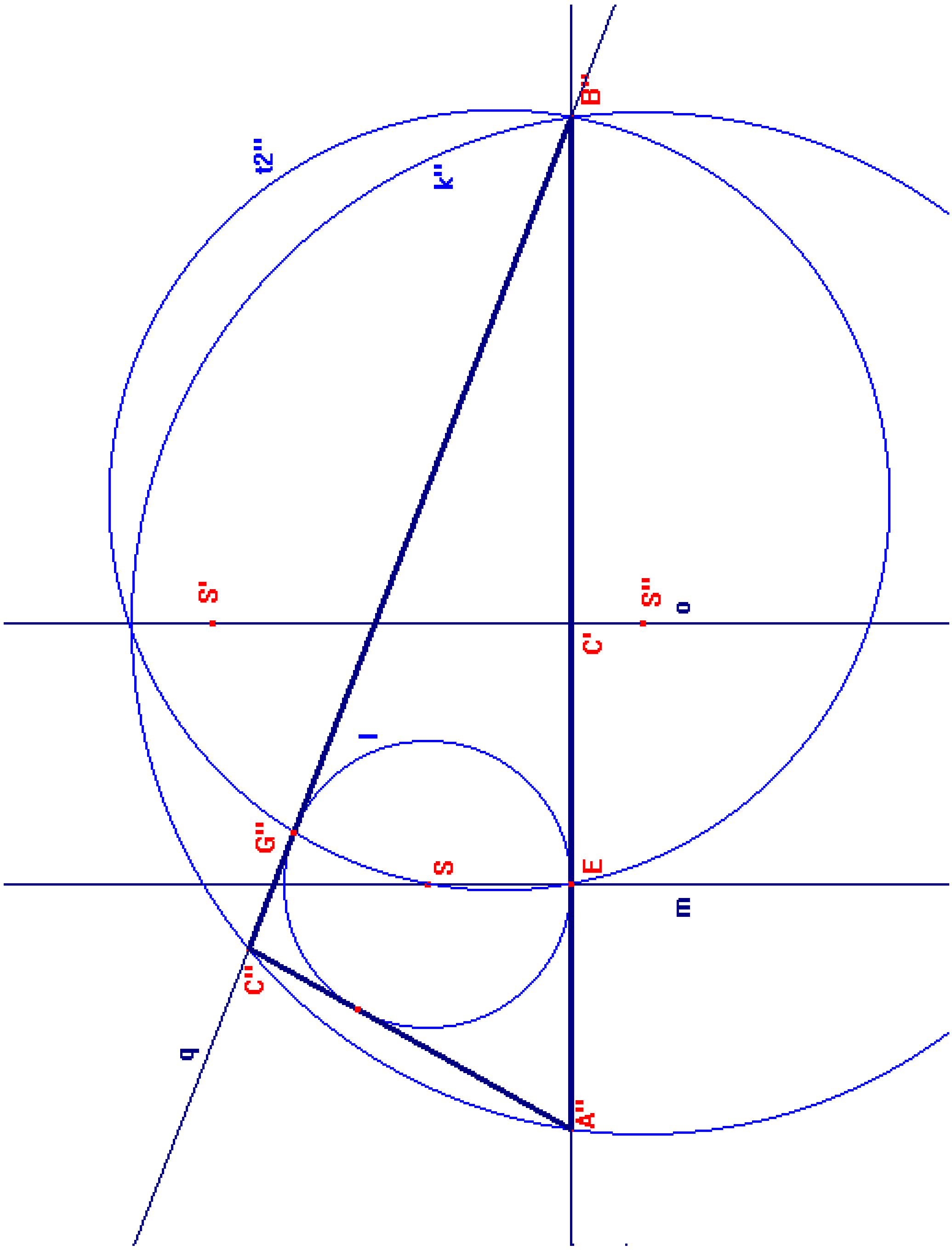
navazuje na konstrukci středů a závisející na podmínkách v rozboru:

13. $k(S';r)$
14. $A,B;(A \in k \cap p) \wedge (B \in k \cap p) \wedge (A \neq B)$
15. $t_2;Tháletova\ kružnice\ nad\ SB$
16. $G;(G \in t_2 \cap l) \wedge (G \notin p)$
17. $q;\ GB \in q$
18. $C;(C \in q \cap k) \wedge (C \neq B)$
19. ΔABC

Konstrukce:



obr.4a

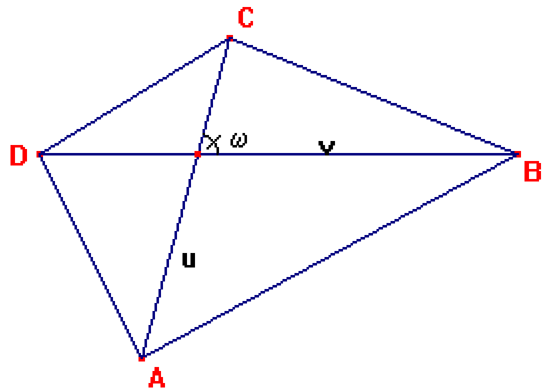


obr.4b

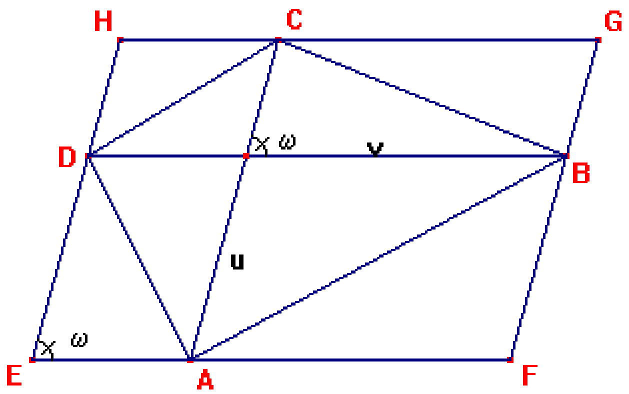
Druhý příklad ze zadávacích listů[6]

Zadání:
Konvexní čtyřúhelník má obsah 1. Jakou nejmenší délku může mít jeho největší úhlopříčka.

Vypracování:
Nakresleme si obrázek, označme si vrcholy, úhlopříčky a jimi sevřený úhel.



V dalším kroku opišme čtyřúhelníku $ABCD$ rovnoběžník $EFGH$ [7].



Obsah opsaného rovnoběžníku $EFGH$ je dvakrát větší než obsah čtyřúhelníku $ABCD$. Pro obsah rovnoběžníku $EFGH$ tedy platí

$$S_{EFGH} = 2 \cdot S_{ABCD}$$

a současně podle vzorce

$$S_{EFGH} = uv \sin \omega .$$

Úpravou získáme vztah po výpočet obsahu čtyřúhelníku $ABCD$

$$S_{ABCD} = \frac{uv \sin \omega}{2} .$$

---

[6] Strana 15/ příklad 30

[7] Opsaný rovnoběžník *EFGH* má strany rovnoběžné s úhlopříčkami čtyřúhelníku *ABCD*.

Diskutujme nyní poslední vztah. Dosaďme zadaný obsah a rovnici upravme

$$1 = \frac{uv\sin\omega}{2}.$$
$$2 = uv\sin\omega$$

Jelikož $|\sin\omega| \leq 1$, platí $2 \leq uv$.

Proto největší úhlopříčka bude mít nejmenší délku, je-li

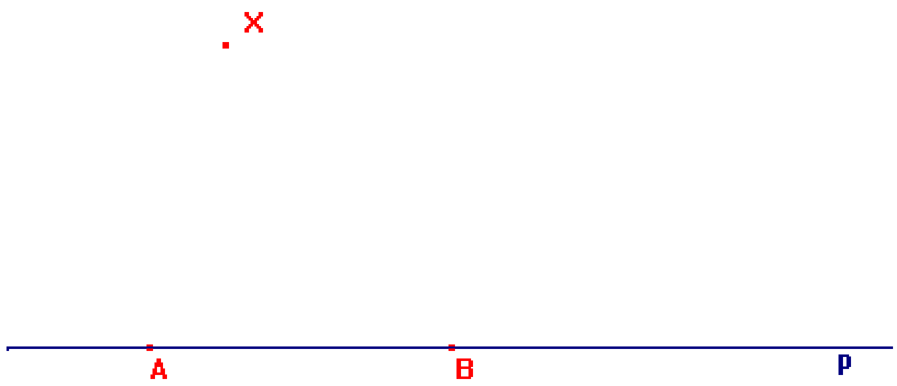
$$(2 = uv) \wedge (u = v).$$

Největší úhlopříčka může mít nejmenší délku $\sqrt{2}$. To nastává právě tehdy, když jsou úhlopříčky stejně dlouhé a tedy konvexním čtyřúhelníkem je čtverec o straně délky 1.

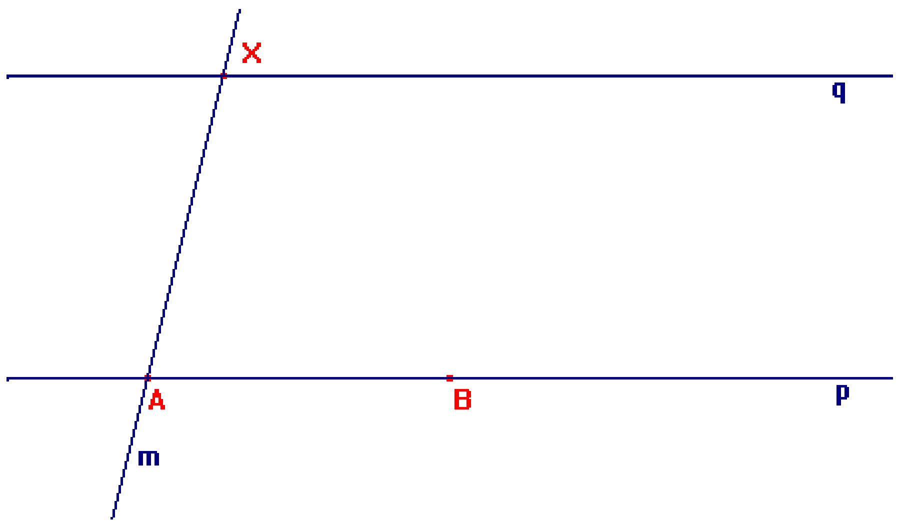
Úloha z Rozhledů[8]

Zadání:
Jestliže je dána úsečka AB, najděte bod C takový, aby bod B byl středem úsečky AC. (Zdvojnásobte danou úsečku AB.)[9]

Vypracování:
Danou úsečkou AB prochází právě jedna přímka, označme ji p. Zvolme bod X tak, že $X \notin p$.

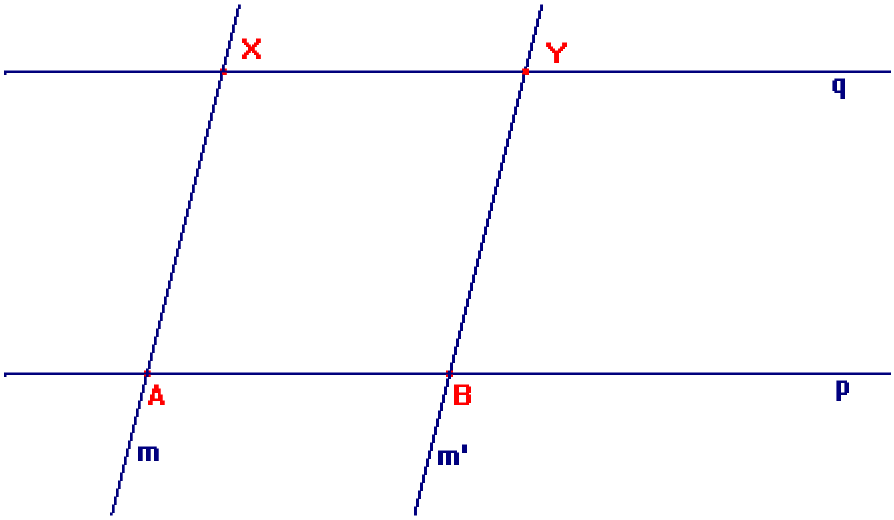


Tímto zvoleným bodem X veďme, pomocí dostupných pomůcek[10], rovnoběžku k přímce p, označme ji q, a přímku bodem A, označme ji m.



[8] Rozhledy matematicko-fyzikální: ročník 63, číslo 7, strana 329/Ú.3.
[9] Ke konstrukci můžeme používat pouze – tužku, pravítko a rovnoběžnítko.
[10] viz předchozí poznámka

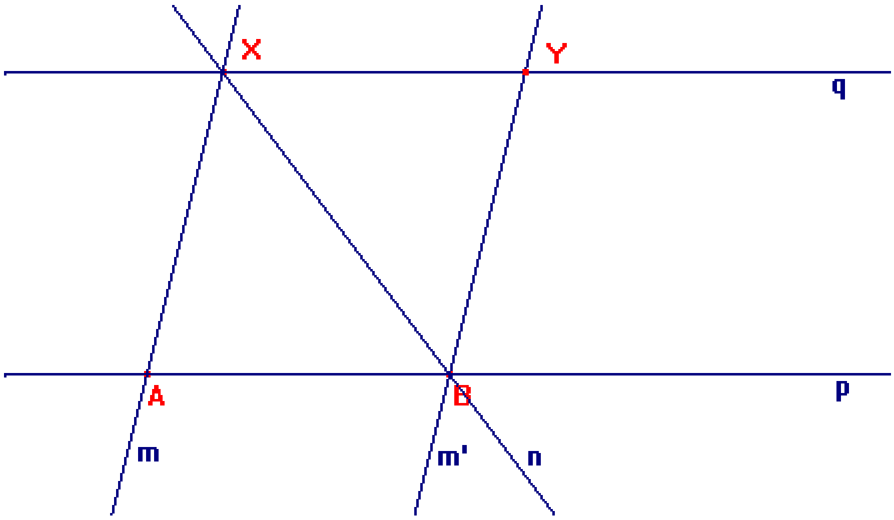
K přímce m veďme bodem B rovnoběžku, m'. Průsečík přímek q,m' označme Y, tedy $Y \in q \cap m'$.



Sestrojili jsme rovnoběžník $ABYX$ [11], pro který zřejmě platí:

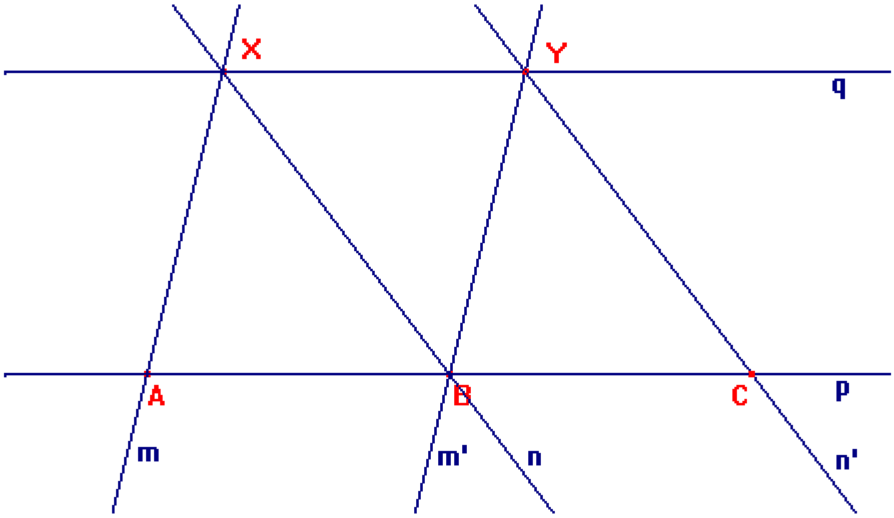
$$|AB| = |XY|$$
$$|AX| = |BY|.$$

V dalším řešení příkladu použijeme vět o podobnosti trojúhelníků.
Sestrojme přímku n procházející body X,B



a rovnoběžku k ní, procházející bodem Y. Tuto rovnoběžku označme n'.

[11] Těchto rovnoběžníků je nekonečně mnoho v závislosti na *X*, ovšem ke zvolenému *X* existuje právě jeden.



Trojúhelníky jsou shodné, neboť

$$\angle BAX \cong \angle CBY,\ \angle ABX \cong \angle BCY,\ |AX| = |BY|,\ |XB| = |YC|,$$

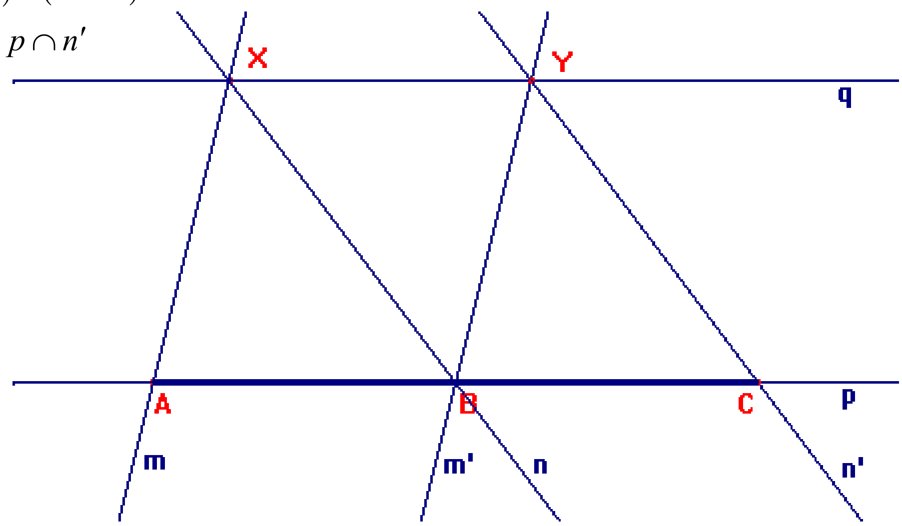
proto i

$$|AB| = |BC|.$$

Bod C je tedy hledané a **jediné řešení** úlohy.

Postup konstrukce: [12]

1. AB
2. $p;\ AB \in p$
3. $X;\ X \notin p$
4. $q;\ (q \parallel p) \wedge (X \in q)$
5. $m;\ AX \in m$
6. $m';\ (m' \parallel m) \wedge (B \in m')$
7. $Y;\ Y \in q \cap m'$
8. $n;\ BX \in n$
9. $n';\ (n' \parallel n) \wedge (Y \in n')$
10. $C;\ C \in p \cap n'$

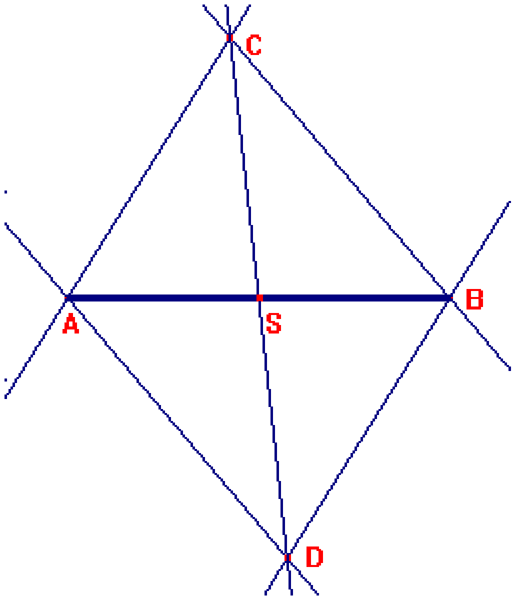


[12] Dvě velká písmena v zápisu označují úsečku (např. AB je označení úsečky AB.)

Náhradní úloha z Rozhledů[13]

Zadání:
Danou úsečku AB rozdělte napůl.

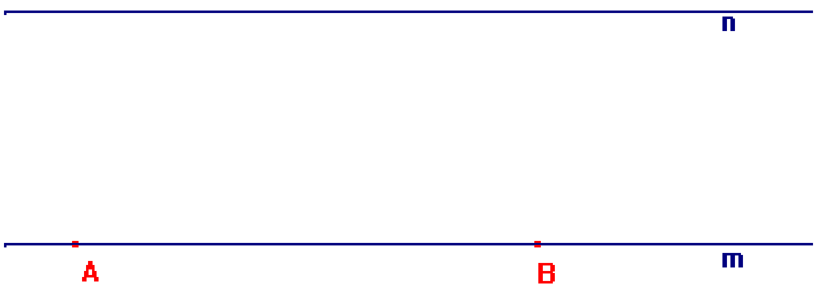
Vypracování:
Ke konstrukci můžeme používat: tužku, pravítko a rovnoběžnítko.



Konstrukce úlohy je velmi jednoduchá. **Aby však nedošlo k pochybení o původu autora řešení, uvádím konstrukci jinou!**

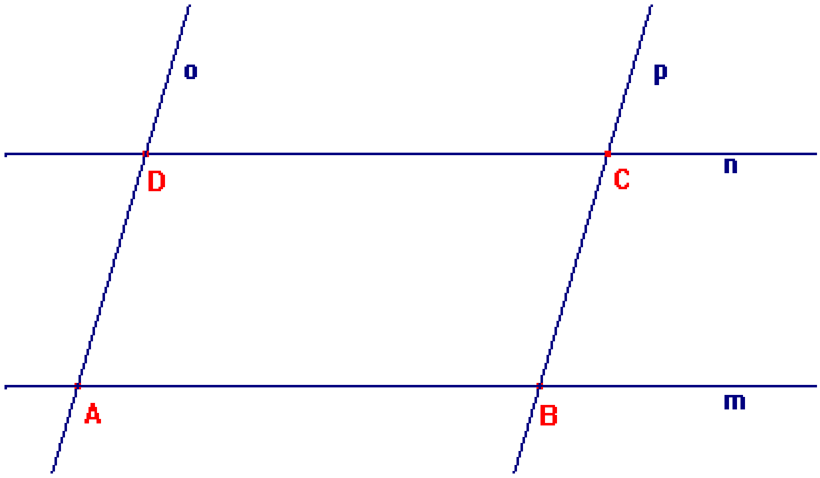
Idea:
Střední příčka rovnoběžníku prochází průsečíkem jeho úhlopříček.

Konstrukce:
Body A, B prochází jediná přímka, označme ji m a sestrojme k ní rovnoběžku n.



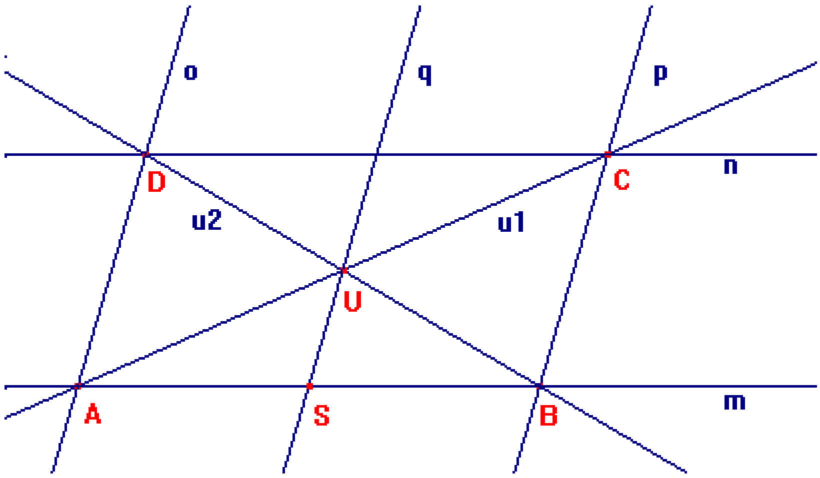
Bodem A veďme přímku $o\,(o \neq m)$ a bodem B přímku p rovnoběžně s přímkou o. Označme průsečíky: $C \in p \cap n$, $D \in o \cap n$.

[13] Rozhledy matematicko-fyzikální: ročník 63, číslo 7, strana 329/Ú.1.



Sestrojme úhlopříčky vzniklého rovnoběžníku $ABCD$ a jejich průsečíkem veďme rovnoběžku q s přímkou o (potažmo s p). Přímka q protíná úsečku AB v hledaném bodě.

Konstrukce:



Postup konstrukce:

1. $m; AB \in m$
2. $n; (n \parallel m) \wedge (n \neq m)$
3. $o; (A \in o) \wedge (o \neq m)$
4. $p; (B \in p) \wedge (p \parallel o)$
5. $C; C \in p \cap n$
6. $D; D \in o \cap n$
7. $u_1; AC \in u_1$
8. $u_2; BD \in u_2$
9. $U; U \in u_1 \cap u_2$
10. $q; (U \in q) \wedge (q \parallel p)$
11. $S; S \in q \cap m$

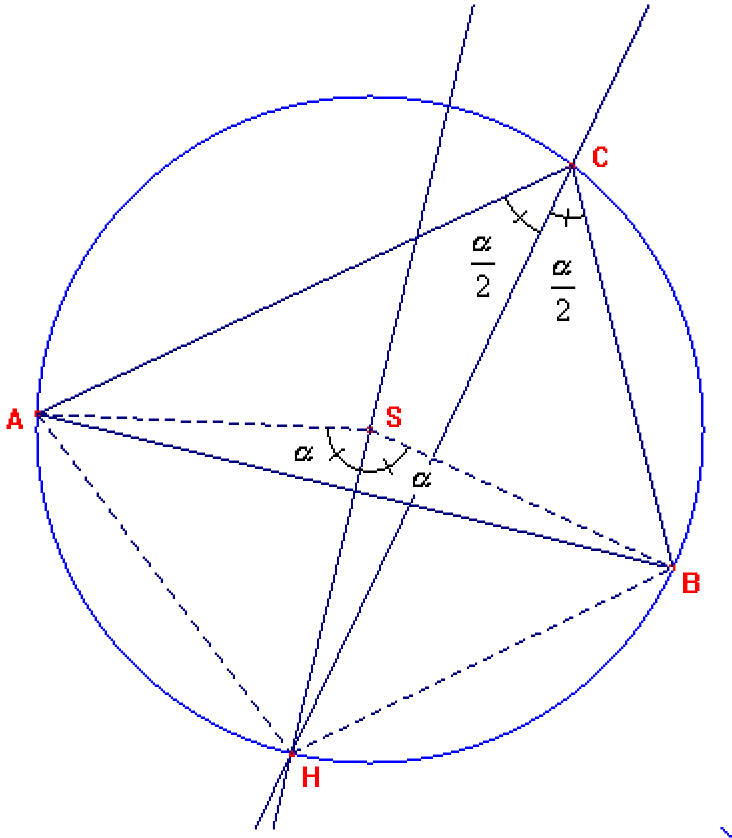
Úloha „navíc“[14]

Zadání:

Sestrojte trojúhelník, je-li dáno v_c, t_c a o_c je délka osy úhlu γ.

Vypracování:

Klíčem k řešení je bod H kružnice opsané, v němž se protínají osa strany a osa protilehlého úhlu.

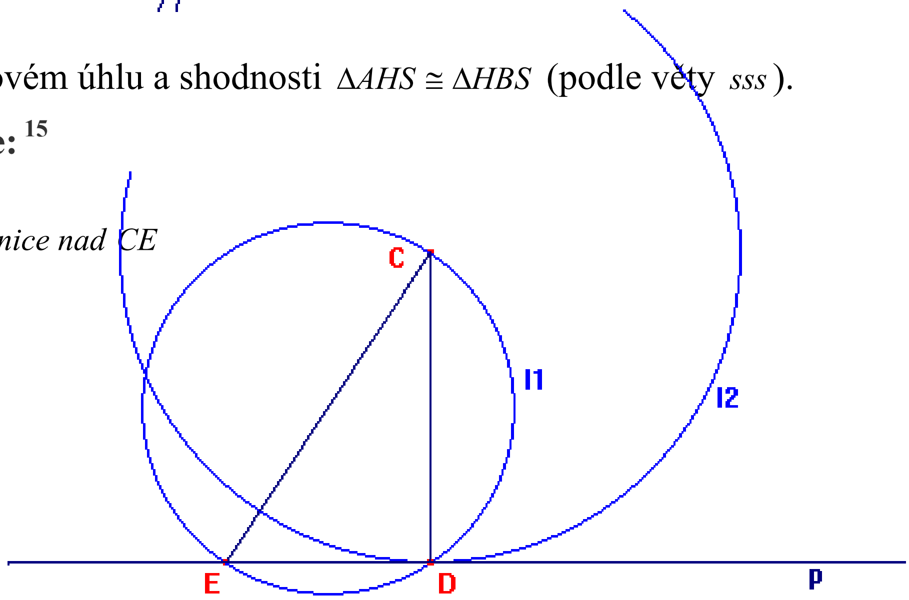


Důkaz:

Plyne z věty o obvodovém úhlu a shodnosti $\Delta AHS \cong \Delta HBS$ (podle věty sss).

Postup konstrukce: [15]

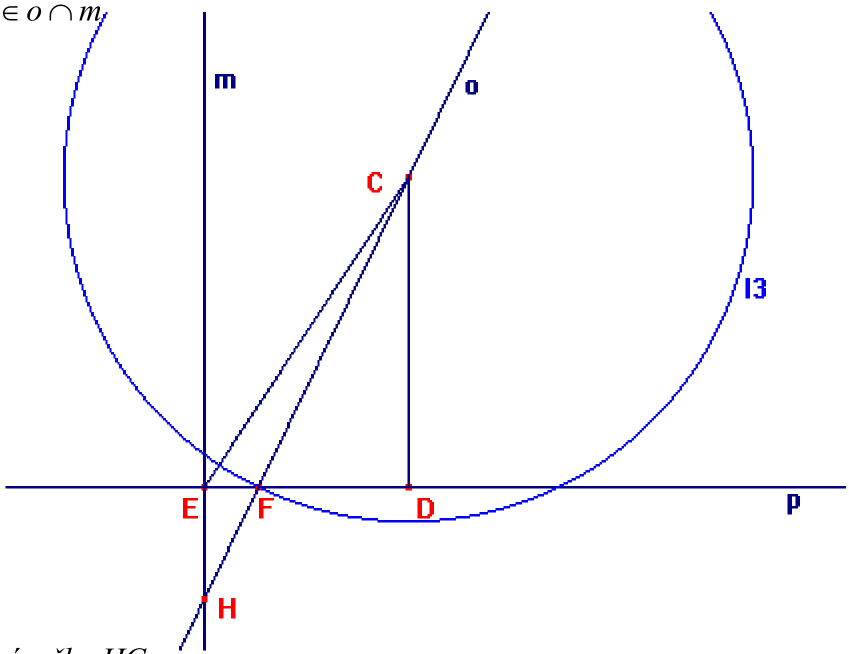
1. $CE; |CE| = t_c$
2. l_1; *Tháletova kružnice nad* CE
3. $l_2(C; v_c)$
4. $D; D \in l_1 \cap l_2$
5. $p; DE \in p$



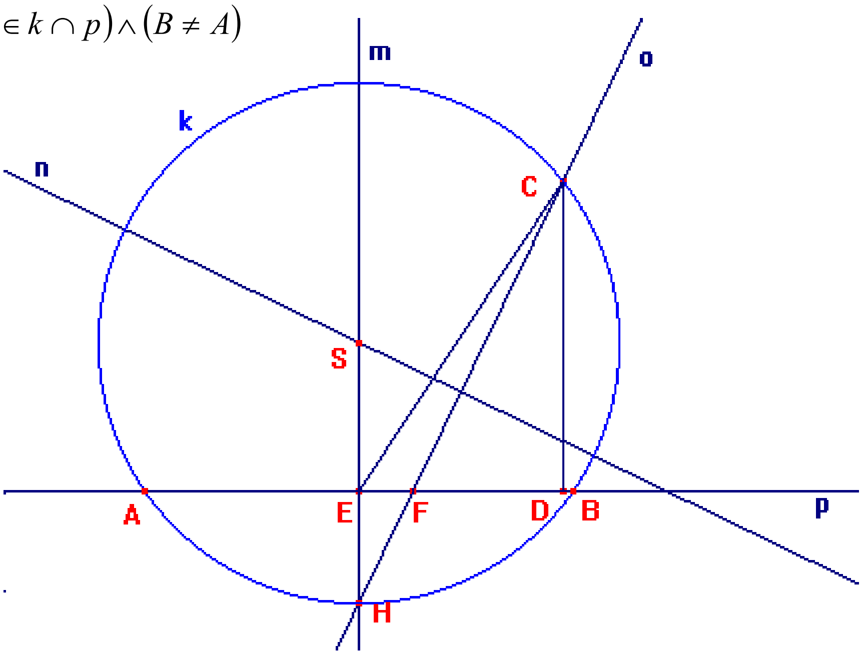
[14] Hejný M., Stehlíková N.: Elementární matematika I. Karolinum Praha 1995. Strana 75 / úloha 8.

[15] Dvě velká písmena v zápisu označují úsečku (např. AB je označení úsečky AB.)

6. $l_3(C;o_c)$
7. $F;(F \in l_3 \cap p) \wedge (F \in DE)$
8. $o;\ CF \in o$
9. $m;(m \perp p) \wedge (E \in p)$
10. $H;\ H \in o \cap m$

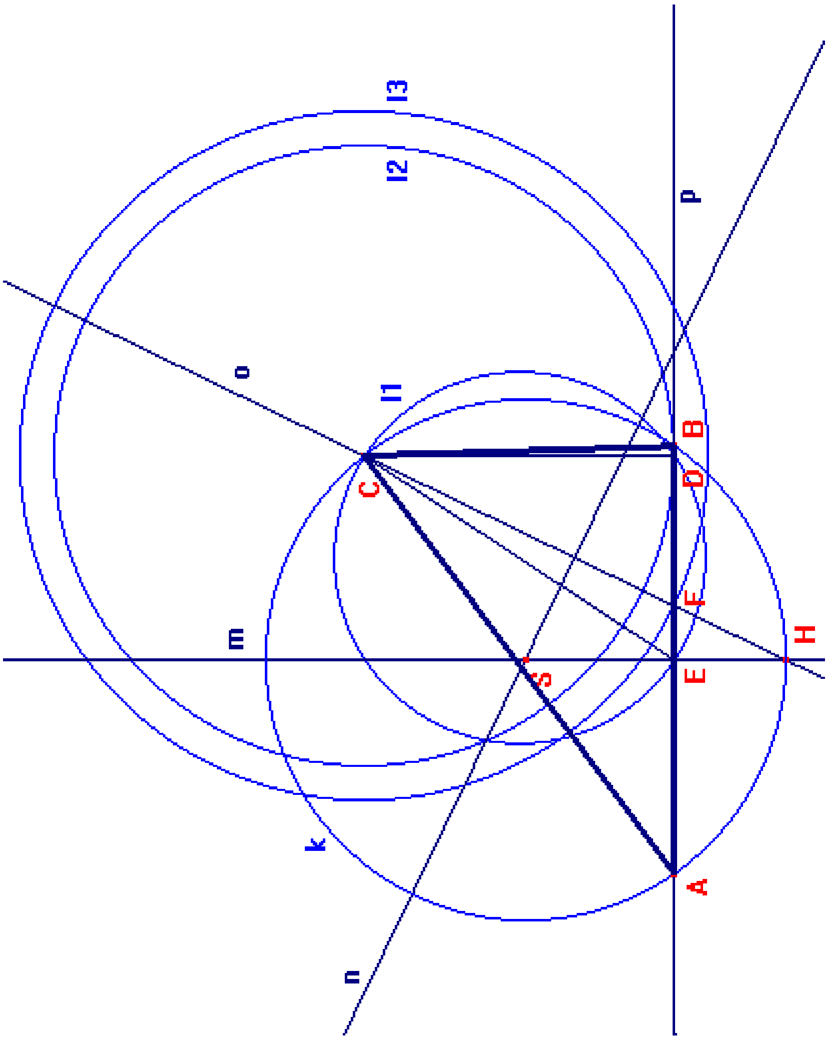


11. n; *osa úsečky HC*
12. $S;\ S \in n \cap m$
13. $k(S;|SC|)$
14. $A;\ A \in k \cap p$
15. $B;(B \in k \cap p) \wedge (B \neq A)$



16. ΔABC

Konstrukce:



Diskuse:

Je-li $v_c < o_c < t_c$, má úloha jediné řešení. Je-li $v_c = o_c = t_c$, má úloha nekonečně mnoho řešení. Ve všech ostatních případech řešení neexistuje.

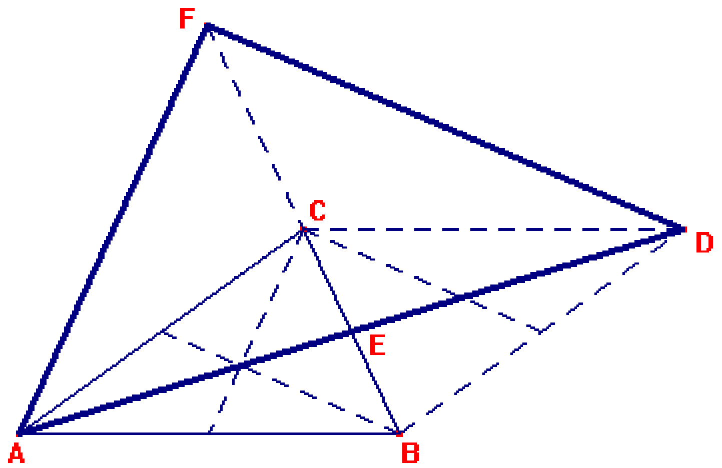
Proč tato úloha navíc?

1. Našel jsem jí ve vysokoškolských skriptech.
2. Řešení vychází z vlastnosti kružnice opsané, jíž jsem si nebyl vědom.

Příklad z knihy[16]

Zadání:
Sestrojte trojúhelník, jestliže jsou dané všechny tři těžnice t_1, t_2, t_3.

Vypracování:
Narýsujme trojúhelník ABC.



Bod B posuneme v posunutí $(A \rightarrow C)$ do bodu D a bod C v posunutí $(B \rightarrow C)$ do bodu F. Tak dostaneme trojúhelník ADF, ve kterém se každá strana rovná dvojnásobku příslušné těžnice trojúhelníku ABC a je s ní rovnoběžná. Přitom také každá strana trojúhelníku ABC tvoří dvě třetiny příslušné těžnice trojúhelníku ADF, proto bod C je těžištěm tohoto trojúhelníka.

Úsečka AD je úhlopříčkou rovnoběžníku $ABDC$ a proto $AE = ED = \frac{2t_1}{2}$.
Těžnice t_2 a t_3 jsou střední příčky v trojúhelnících BDF a ABF, a proto

$$DF = 2t_2 \qquad \text{a} \qquad AF = 2t_3$$

Dále $CE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}CF$. EF je těžnicí trojúhelníku ADF a bod C, pro který platí $CE = \frac{1}{3}FE$, je těžiště trojúhelníku ADF.

Důkaz
vyplývá z rozboru úlohy.

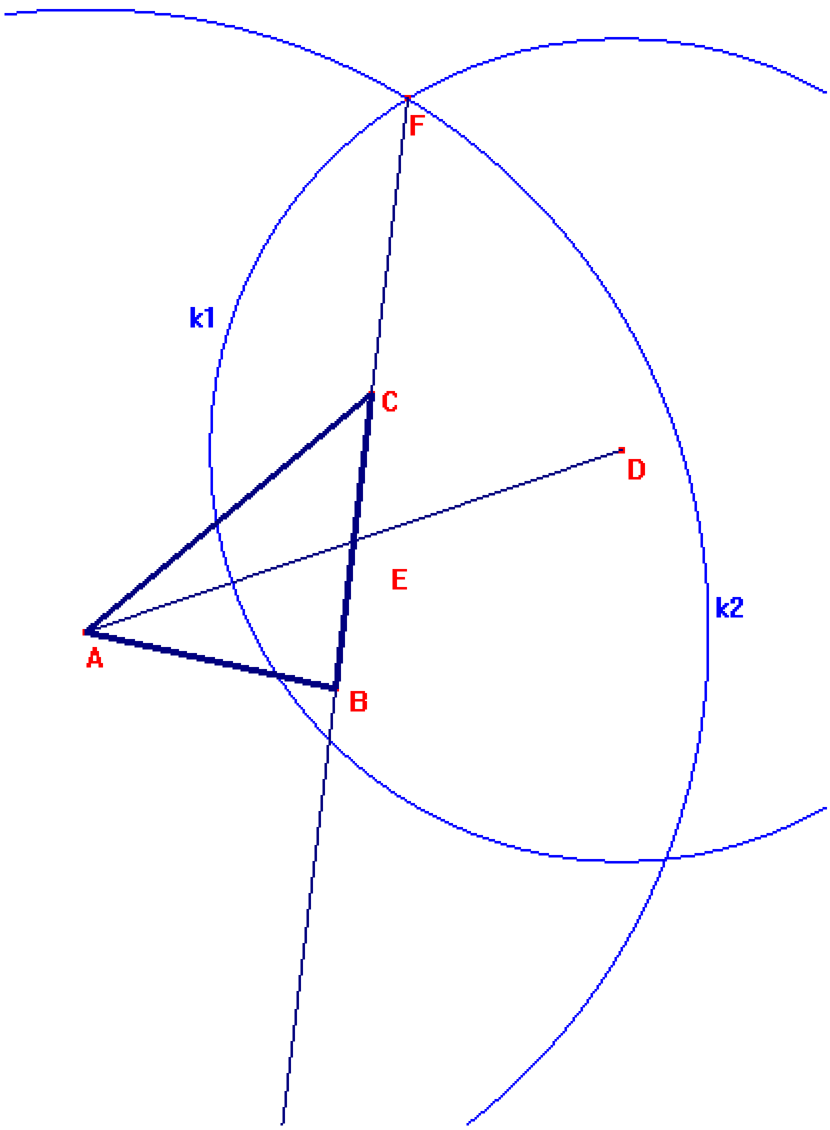
Diskuse řešení:
Konstrukce je možná právě tehdy, když existuje trojúhelník ADF.

[16] Šofr, B.: Euklidovské geometrické konstrukce. Strana 51/ příklad 1.

Postup konstrukce:

1. $AD; |AD| = 2t_1$
2. $k_1(D; 2t_2)$
3. $k_2(A; 2t_3)$
4. $F; F \in k_1 \cap k_2$
5. $E; E = A - \circ - D$
6. $C; (C \in EF) \wedge (|FC| : |CE| = 2:1)$
7. $B; B = S_E(C)$ [17]
8. ΔABC

Konstrukce:



[17] Bod *B* je obraz bodu *C* ve středové souměrnosti se středem v bodě *E*.

Úloha na vybraný problém[18]

Definice:

Nechť existují kružnice připsané trojúhelníku ABC a jejich dotykové body N_1, N_2, N_3 postupně s hranami AB, BC, CA. Spojíme-li vždy tento dotykový bod s protilehlým vrcholem trojúhelníku, všechny tři přímky se protnou v jediném bodě trojúhelníka (N), který se nazývá Nagelův bod.

Zadání:

Najděte polohu Nagelova bodu v pravoúhlém trojúhelníku ABC, pokud jsou dány délky jeho odvěsen.

Vypracování:

Rozbor:

Trojúhelník ABC narýsujme podle věty sus. Konstrukce připsaných kružnic závisí na nalezení jejich středů, které leží v průsečících os úhlů přilehlých k hranám trojúhelníka. Vzniklé tři dotykové body N_1, N_2, N_3 postupně spojme s protilehlými vrcholy C, A, B. Průsečík těchto spojnic je hledaný Nagelův bod.

Diskuse:

Negalův bod lze najít pro každý trojúhelník, neboť každý trojúhelník splňuje podmínky definice.

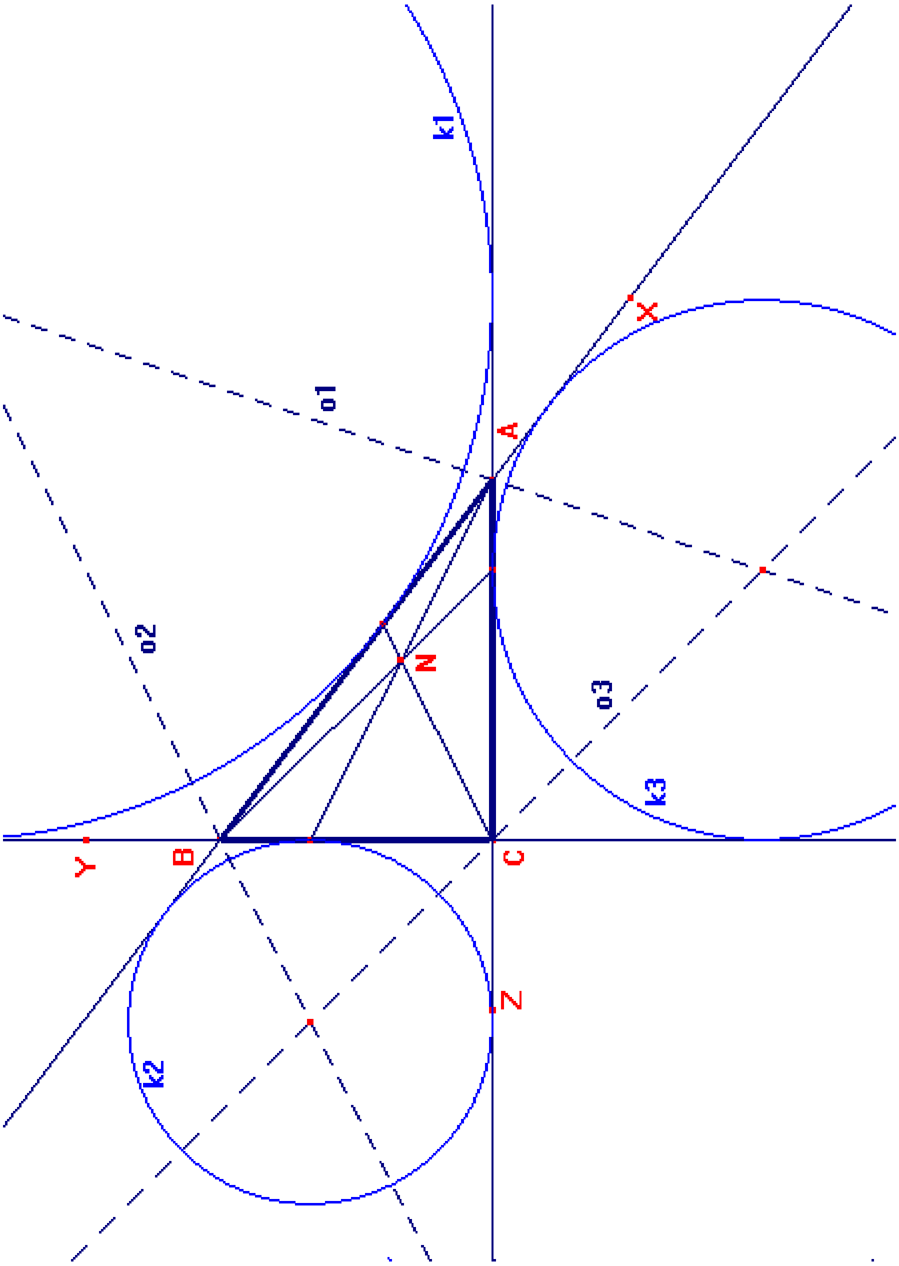
Postup konstrukce:

1. $\Delta ABC; |\angle ACB| = 90^\circ, |BC| = a, |CA| = b$
2. $X; X \in \mapsto BA; |BA| < |BX|$
   $Y; Y \in \mapsto CB; |CB| < |CY|$
   $Z; Z \in \mapsto AC; |AC| < |AZ|$
3. $o_1; osa\ úhlu\ CAX$
   $o_2; osa\ úhlu\ ABY$
   $o_3; osa\ úhlu\ BCZ$
4. $k_1; k_1(S_1; |S_1 \leftrightarrow AB|); S_1 \in o_1 \cap o_2$
   $k_2; k_2(S_2; |S_2 \leftrightarrow BC|); S_2 \in o_2 \cap o_3$
   $k_3; k_3(S_3; |S_3 \leftrightarrow CA|); S_3 \in o_3 \cap o_1$
5. N_1, N_2, N_3 *- dotykové body kružnic a hran*
6. *úsečky* $N_1C,\ N_2A,\ N_3B$
7. $N; N \in (N_1C \cap N_2A \cap N_3B)$

---

[18] Švrček, J., Vanžura, J.: Geometrie trojúhelníka. Strana 41.

Konstrukce:



Náhradní úloha na vybraný problém - Lemoinův bod

Zadání:

Nechť je dán libovolný trojúhelník MNO. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby těžiště trojúhelníka MNO bylo Lemoinovým bodem trojúhelníka ABC.

Vypracování:

Terminologie

Lemoinovým bodem nazýváme průsečík symedián trojúhelníka. Symediánou z vrcholu A trojúhelníka ABC nazveme přímku souměrně sdruženou podle osy úhlu BAC s těžnicí (přímkou) z tohoto vrcholu.[19]

Rozbor

Vyjděme z věty: *Buď L Lemoinův bod trojúhelníka ABC a buď $L'L''L'''$ úpatnicový trojúhelník příslušný Lemoinovu bodu. Potom Lemoinův bod je těžištěm úpatnicového trojúhelníka*. Obrácením předpokladů a tvrzení získáme návod k řešení.

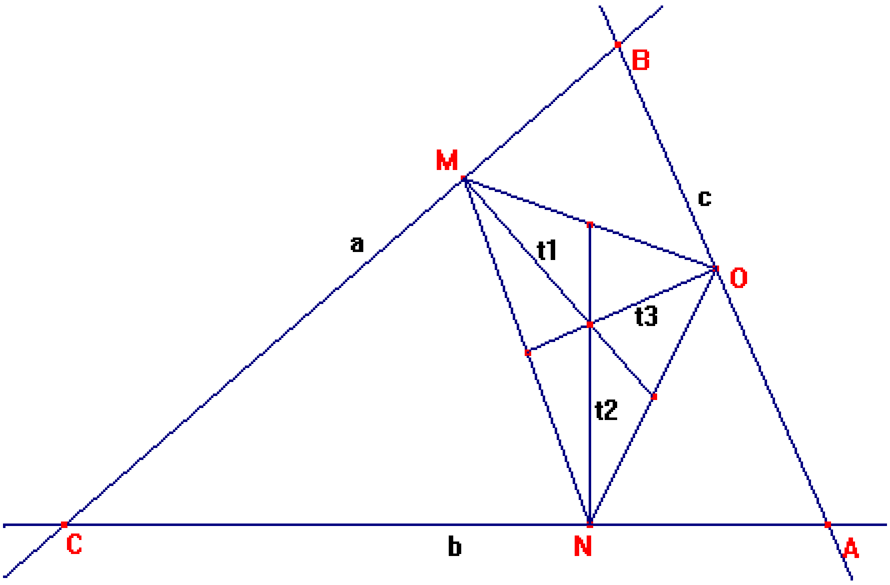
Postup konstrukce:

1. ΔMNO
2. t_1, t_2, t_3; *těžnice* ΔMNO *příslušející vrcholům po řadě* M, N, O
3. a, b, c; *kolmice k težnicím* t_1, t_2, t_3 *ve vrcholech* M, N, O
4. ΔABC

Diskuse:

Úloha má vždy právě jedno řešení.

Konstrukce:



Proč tato úloha?

Úlohu jsem si vybral proto, že popisuje další důležitý bod trojúhelníka.

---

[19]Švrček, J.: Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka

OBSAH