Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

SEMINÁRNÍ PRÁCE Z ÚVODU DO MATEMATICKÉ ANALÝZY

LIMITA POSLOUPNOSTI

1999/2000 **Cifrik, M-ZT**

a) Zadání:

Dokažte z definice existenci limity posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. $a_n = \dfrac{\cos\sqrt{3n}}{2n+5}$

Vypracování:

Předpisem jsou definovány všechny členy posloupnosti.

Hypotéza:

Protože absolutní hodnota funkce kosinus obsažené v čitateli může nabývat hodnoty $\langle 0,1\rangle$ a protože se jmenovatel blíží k $+\infty$, je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz:

Podle definice limity mám dokázat:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N\ \forall n \in N,\ n \ge n_0 : \left|\frac{\cos\sqrt{3n}}{2n+5} - 0\right| < \varepsilon$$

Zvolím $\varepsilon > 0$, pevné

$$\left|\frac{\cos\sqrt{3n}}{2n+5} - 0\right| \le \frac{1}{2n+5} < \frac{1}{2n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{2n} < \varepsilon$$

[1] $$\frac{1}{2\varepsilon} < n$$

[2] $$n_0 = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1$$

a můžu psát:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N,\ n_0 = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1,\ \forall n \in N,\ n \ge n_0 :$$

$$n \ge n_0 = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{2\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{2n} \Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{2n+5} \Rightarrow \varepsilon > \frac{\cos\sqrt{3n}}{2n+5} \Rightarrow \varepsilon > \left|\frac{\cos\sqrt{3n}}{2n+5} - 0\right|$$

konec důkazu.

---

[1] n, ε jsou kladná – ekvivalentní úprava

[2] celou část volíme proto, aby $n_0 \in N$

b) Zadání:

Vypočítejte, pokud existují, limity posloupností:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\ \{b_n\}_{n=1}^{\infty},\ \{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty},\ \{a_n-b_n\}_{n=1}^{\infty},\ \{a_n.b_n\}_{n=1}^{\infty},\ \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty},\ \left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty},$$

$$\text{kde } a_n=\frac{n^2+(-1)^n}{n^2},\ b_n=\frac{1}{\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2+1}}$$

Vypracování:

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$a_n=\frac{n^2+(-1)^n}{n^2}=1+\frac{(-1)^n}{n^2}$$

použiji větu o limitě součtu dvou posloupností, tedy:

$$\lim_{n\to\infty}1=1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0\ ^{3}\text{, proto}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+(-1)^n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=1+0=1$$

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$b_n=\frac{1}{\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2+1}}=\frac{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2+1}}{n^2-n^2-1}=-\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)$$

Protože posloupnost $n+\sqrt{n^2+1}$ roste neomezeně (diverguje) je $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=-\infty$.

$\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{a_n-b_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=1+(-\infty)=-\infty\ ^{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=1-(-\infty)=+\infty$$

$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{-\infty}=0\ ,^{5}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{-\infty}{1}=-\infty$$

---

[3] důkaz na další straně

[4] věta o limitě součtu dvou posloupností a věty o nekonečnech

[5] $a_n\neq b_n\neq 0$.

Důkaz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N\ \forall n \in N,\ n \geq n_0 : \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

Zvolím $\varepsilon > 0$, pevné

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N,\ n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1,\ \forall n \in N,\ n \geq n_0 :$$

$$n \geq n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{n} \Rightarrow \varepsilon > \left| \frac{1}{n} - 0 \right|$$

konec důkazu.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{-1}{n^2} & \leq & \frac{(-1)^n}{n^2} & \leq & \frac{1}{n^2} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{n^2} = 0 & & & & \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$$

Z věty o limitě sevřené posloupnosti plyne $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$.

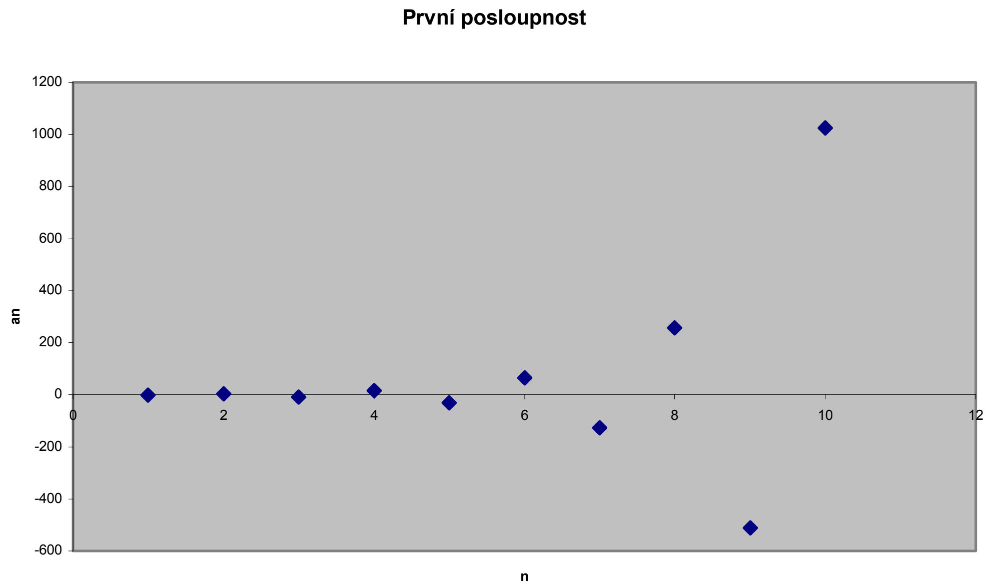
konec důkazu.

c) Zadání:

Sestrojte tři různé posloupnosti, jejichž limita neexistuje, neexistenci limity dokažte.

Vypracování:

první: $\left\{(-2)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$



Důkaz:

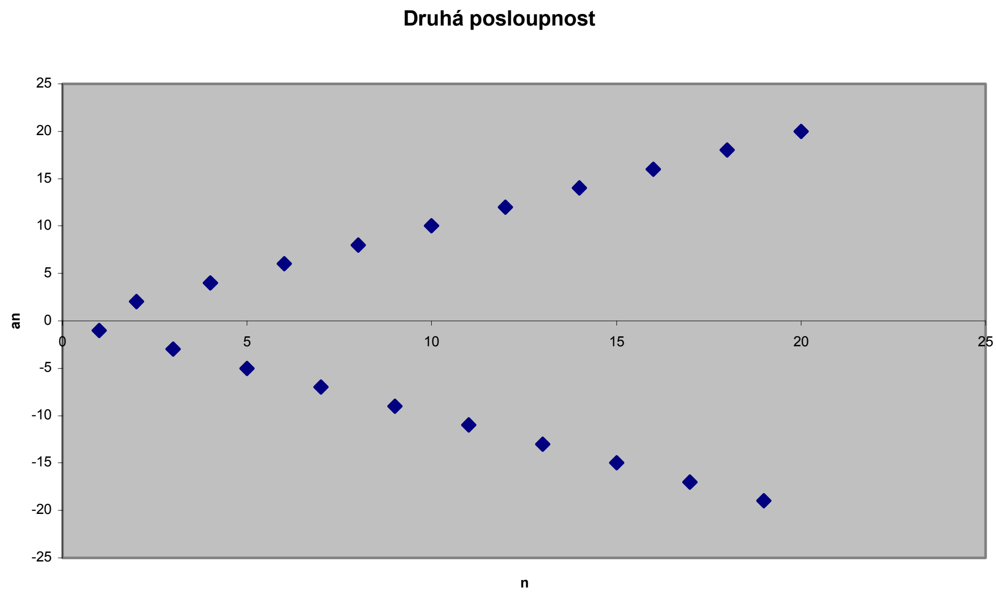
$$\text{pro } n \text{ lichá má } \left\{(-2)^n\right\}_{n=1}^{\infty} \text{ prvky } \{-2,-8,-32,-128,\ldots\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n\,lichá} = -\infty$$

$$\text{pro } n \text{ sudá má } \left\{(-2)^n\right\}_{n=1}^{\infty} \text{ prvky } \{4,16,64,256,\ldots\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n\,sudá} = \infty$$

Dvě výše uvedené vybrané posloupnosti z $\left\{(-2)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ mají každá jinou limitu $\Rightarrow$ posloupnost nemá limitu.

konec důkazu.

druhá: $\left\{(-1)^n.n\right\}_{n=1}^{\infty}$



Důkaz:

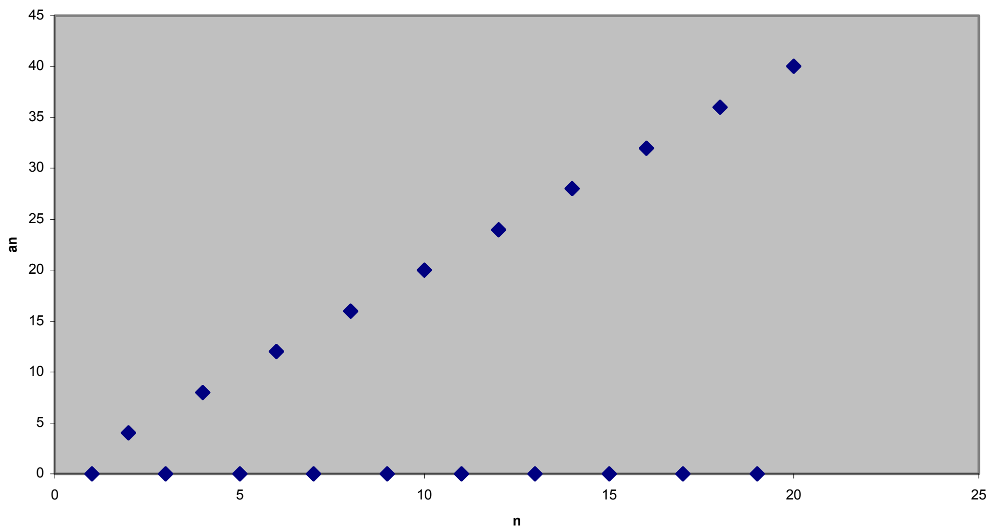
pro *n lichá* má $\left\{(-1)^n.n\right\}_{n=1}^{\infty}$ prvky $\{-1,-3,-5,-7,\ldots\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{n\,lichá} = -\infty$

pro *n sudá* má $\left\{(-1)^n.n\right\}_{n=1}^{\infty}$ prvky $\{2,4,6,8,10,\ldots\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{n\,sudá} = \infty$

Dvě výše uvedené vybrané posloupnosti z $\left\{(-1)^n.n\right\}_{n=1}^{\infty}$ mají každá jinou limitu
$\Rightarrow$ posloupnost nemá limitu.

konec důkazu.

třetí: $\left\{\left[1+(-1)^n\right]\cdot n\right\}_{n=1}^{\infty}$



Důkaz:

pro n *lichá* má $\left\{\left[1+(-1)^n\right]\cdot n\right\}_{n=1}^{\infty}$ prvky $\{0,0,0,\dots\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{n\,lichá} = 0$

pro n *sudá* má $\left\{\left[1+(-1)^n\right]\cdot n\right\}_{n=1}^{\infty}$ prvky $\{4,8,12,16,\dots\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{n\,sudá} = \infty$

Dvě výše uvedené vybrané posloupnosti z $\left\{\left[1+(-1)^n\right]\cdot n\right\}_{n=1}^{\infty}$ mají každá jinou limitu
$\Rightarrow$ posloupnost nemá limitu.

konec důkazu.