Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

SEMINÁRNÍ PRÁCE Z DIFERENCIÁLNÍHO POČTU

LIMITA FUNKCE

2000/2001 **Cifrik, M-ZT**

Zadání:

Bez užití L´Hospitalova pravidla vypočtěte zadanou limitu. Postup řešení přehledně zapište. Pokud je v zadání příkladu parametr, proveďte diskusi.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(a+x)\sin(a-x) - \sin^2 a}{x^2}$$

Vypracování:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(a+x)\sin(a-x) - \sin^2 a}{x^2}$$

Při řešení této úlohy nejprve upravíme čitatele a pak použijeme větu o limitě součinu.

$$\stackrel{1}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(\sin a \cos x + \cos a \sin x)(\sin a \cos x - \cos a \sin x) - \sin^2 a}{x^2} =$$

$$\stackrel{2}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 a \cos^2 x - \cos^2 a \sin^2 x - \sin^2 a}{x^2} =$$

$$\stackrel{3}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\sin^2 a(1 - \cos^2 x) - \cos^2 a \sin^2 x}{x^2} =$$

$$\stackrel{4}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(-\sin^2 a - \cos^2 a)\sin^2 x}{x^2} =$$

$$\stackrel{5}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-1\,(\sin^2 a + \cos^2 a)\sin^2 x}{x^2} =$$

$$\stackrel{6}{=} \lim_{x \to 0}(-1) \cdot \lim_{x \to 0}(\sin^2 a + \cos^2 a) \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = -1 \cdot 1 \cdot 1 = \underline{\underline{-1}}$$

Použité úpravy a vzorce:

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$
2. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
3. vytknutí $-\sin^2 a$
4. vytknutí $\sin^2 x$
5. vytknutí -1
6. $\lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

Výsledná limita nezávisí na parametru a, neboť $\sin^2 a + \cos^2 a = 1\ (konst.)$.

Výsledek:

$$\forall a \in R : \lim_{x \to 0} \frac{\sin(a+x)\sin(a-x) - \sin^2 a}{x^2} = -1$$

Zadání:

Zadejte a vyřešte úlohu na výpočet limity funkce v bodě tak, aby

a) existovaly jednostranné limity v daném bodě, ale neexistovala limita oboustranná
b) existovala alespoň jedna jednostranná limita, ale aby oboustranná limita neexistovala

---

Vypracování:

Ad a)

Idea:

Zadání vyhovují například funkce *tg x* a *cotg x* v bodech, jenž jsou vyloučeny z definičního oboru. Dalšími vyhovujícími funkcemi jsou ty, které lze zapsat rovnicí nepřímé závislosti (tj. $y = \frac{1}{x}$). Jsou i jiné.

Příklad:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x^2-4} \text{ neexistuje, protože}$$

$$\lim_{x \to 2_+} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \to 2_+} \frac{1}{x-2} = \infty$$

$$\lim_{x \to 2_-} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \to 2_-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

Ad b)

Idea:

Zadání vyhovují například funkce *log x* nebo $\sqrt{x}$, které jsou definovány jen pro kladná čísla a proto mají v okolí nuly právě jednu jednostrannou limitu.

Příklad:

$$\lim_{x \to 2} \log \frac{x^2-4}{x+2} \text{ neexistuje, protože}$$

$$\lim_{x \to 2_+} \log \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x \to 2_+} \log(x-2) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2_-} \log \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x \to 2_-} \log(x-2)$$, logaritmus není definován pro záporná čísla.