Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

DRUHÁ SEMINÁRNÍ PRÁCE Z DIFERENCIÁLNÍHO POČTU

PRŮBĚH FUNKCE

2000/2001 **Cifrik, M-ZT**

Zadání:

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x):\ y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$$

Vypracování:

$$f(x):\ y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$$

Předně určíme definiční obor: $D_f=R-\{-1,1\}=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$

Tato funkce je sudá, neboť jsou splněny obě podmínky pro sudost funkce [1] tj.

1. $\forall x\in D_f\ \exists -x\in D_f$
2. $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=\dfrac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2}$

Funkce není periodická.

Při vyšetřování funkce, zjišťujeme funkční hodnoty v krajních bodech definičního oboru. V našem případě jsou to vlastní body *1*, *–1* a nevlastní $\infty,-\infty$. Protože je funkce sudá, omezíme se jen na vyšetřování nezáporné části [2].

Nejprve vlastnosti funkce v okolí bodu *1*. Ten nepatří do D_f a proto určíme limity funkce v pravém a levém okolí tohoto bodu.

$$\lim_{x\to 1_-}\frac{1+x^2}{1-x^2}$$

Na výpočet této limity nemáme zavedený vzorec a tak použijeme substituci $y=1-x^2$, jež nás dovede k cíli [3]:

$$\lim_{y\to 0_+}\frac{2-y}{y}=\infty,$$

proto

$$\lim_{x\to 1_-}\frac{1+x^2}{1-x^2}=\infty.$$

Obdobně dojdeme k

$$\lim_{x\to 1_+}\frac{1+x^2}{1-x^2}=-\infty.$$

---

[1] Definice sudé funkce ($f(-x)=f(x)$)

[2] graf je souměrný podle osy *y*

[3] $\lim_{x\to 0_+}\frac{1}{x}=\infty$

A konečně v nevlastních bodech $\pm\infty$ je limita

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+x^2}{1-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-x^2}+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{1-x^2}=0-1=-1.$$

Z předchozích výpočtů plyne, že křivka má asymptoty $y=-1,\quad x=\pm1$.

Výpočtem limit jsme zároveň určili dva absolutní (globální) extrémy a jeden lokální:
- v intervalu $(-1,1)$ má funkce maximum ∞
- v intervalech $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$ má funkce minimum $-\infty$ a maximum -1

Nyní vyšetříme zda, případně kolik a jaké, má funkce $f(x)$ průsečíky s osami souřadnic.
S osou *x* nemá funkce žádné průsečíky, protože pro $y=0$ není definována [4].

Pro $x=0$ je $y=\frac{1+0^2}{1-0^2}=1$, proto má $f(x)$ právě jeden průsečík s osou *y* a to $[0,1]$.

Zatím jsme zjistili, že naše funkce není definována v bodech *1* a *–1* a proto není spojitá v *R*. Nevíme však, jaký je její průběh v jednotlivých intervalech definičního oboru. Abychom získali názornější představu o průběhu funkce, zjistíme má-li derivaci.

$$y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$$

$$y'=\frac{\left(1+x^2\right)'\left(1-x^2\right)-\left(1+x^2\right)\left(1-x^2\right)'}{\left(1-x^2\right)^2}$$

$$y'=\frac{2x\left(1-x^2\right)-\left(1+x^2\right)(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2}$$

$$y'=\frac{2x-2x^3-\left(-2x-2x^3\right)}{\left(1-x^2\right)^2}$$

$$y'=\frac{4x}{\left(1-x^2\right)^2}$$

Protože má vlastní derivaci [5], můžeme určit její vlastnosti v intervalech $\langle 0,1)$ a $(1,\infty)$.
V těchto intervalech je $y'>0$ a proto jde o funkci ryze monotónní, rostoucí [6] v daných intervalech [7].

Výpočtem zjistíme druhou derivaci funkce. Ta nám pomůže určit další extrém v intervalu $\langle 0,1)$ a zároveň vyšetřit konkávnost a konvexnost.

---

[4] $H_f=R-\left(-1,1\right\rangle$

[5] *f*(*x*) je spojitá v intervalech (-∞,-1),(-1,1),(1,∞) (věta s spojité funkci)

[6] Plyne z věty o postačujících podmínkách ryzí monotónnosti funkce na intervalu

[7] V intervalech (-∞,-1),(-1,0> je funkce klesající.

$$y'' = \frac{(4x)'(1-x^2)^2 - 4x(1-2x^2+x^4)}{(1-x^2)^4}$$
$$y'' = \frac{4(1-2x^2+x^4) - 4x(-4x+4x^3)}{(1-x^2)^4}$$
$$y'' = \frac{4(1+2x^2-3x^4)}{(1-x^2)^4} = \frac{4(1-x^2)(3x^2+1)}{(1-x^2)^4}$$
$$y'' = \frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^3}$$

Abychom mohli určit lokální extrém funkce $f(x)$ v intervalu $\langle 0,1)$, pomocí druhé derivace, musíme najít kořeny rovnice $f'(x)=0$. V našem případě

$$y' = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$
$$\frac{4x}{(1-x^2)^2} = 0 \qquad ,$$
$$x_0 = 0$$

tento kořen [8] pak dosadíme do druhé derivace, tj.

$$y''(0) = \frac{4(3\cdot 0^2+1)}{(1-0^2)^3} = 4,$$

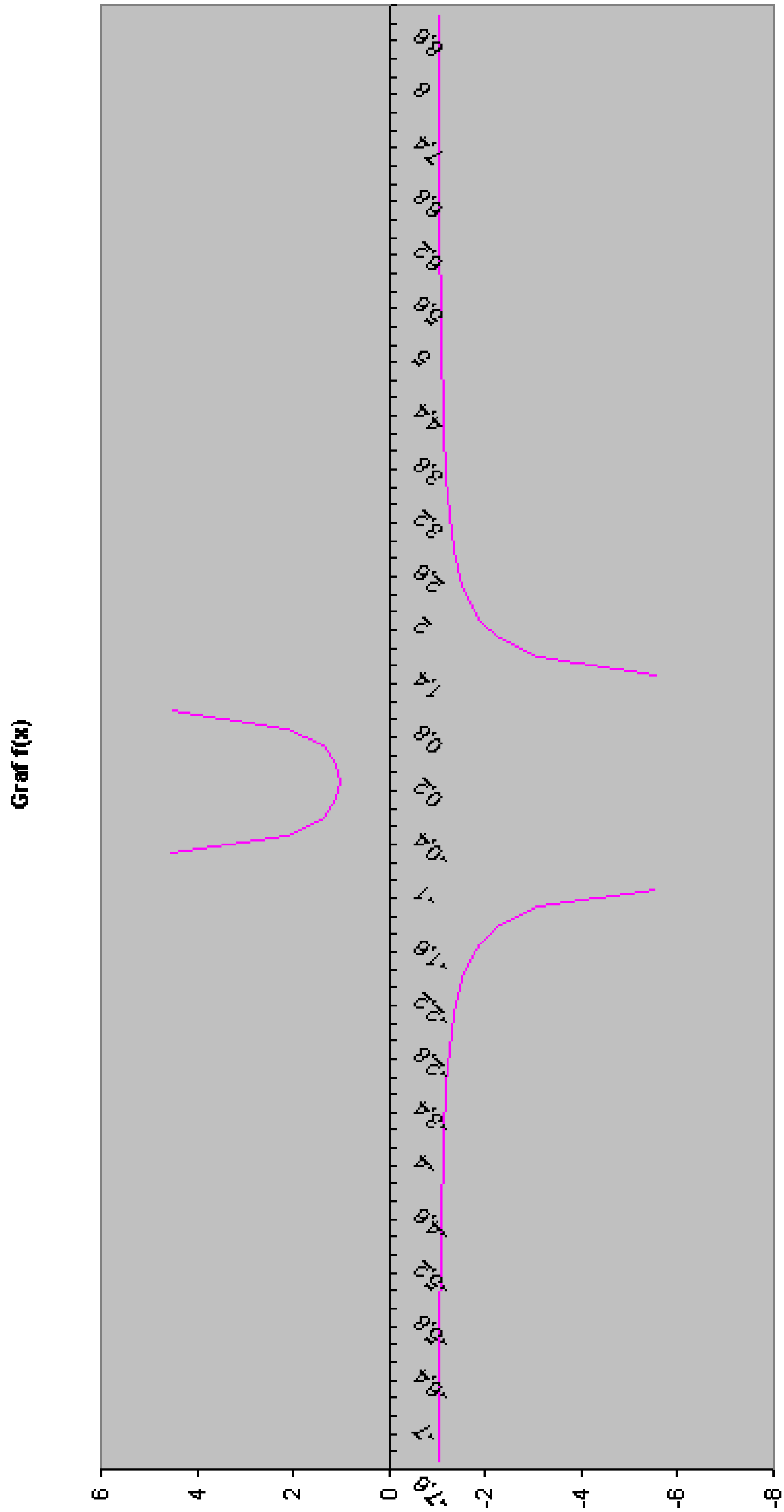
protože je $f''(x_0) > 0$, má bodě x_0 lokální minimum. Můžeme rovněž konstatovat, že funkce nemá inflexní body [9]. Konkávnost a konvexnost funkce v intervalech $\langle 0,1)$ a $(1,\infty)$ vyšetříme pomocí vlastností druhé derivace funkce. Tedy

$$\langle 0,1):\ y'' = \frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^3} > 0 \quad \Rightarrow \text{ funkce je v tomto intervalu konvexní}$$
$$(1,\infty):\ y'' = \frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^3} < 0 \quad \Rightarrow \text{ funkce je v tomto intervalu konkávní}$$

Můžeme zkonstruovat graf.

[8] stacionární bod

[9] Pro existenci inflexního bodu je nutné splnění jedné z podmínek a to buď $f''(x_0)=0$, nebo $f''(x_0)$ neexistuje.


Graf f(x)
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8

Obvyklý postup při vyšetřování průběhu funkce [10]:

1. Zjistíme definiční obor funkce, vyjádříme jej v intervalech a z nich poznáme, kde je funkce spojitá. Funkce je spojitá v (a,b) pro každý bod tohoto intervalu, když
$$|f(x)-f(c)|<\varepsilon,$$
kde $\varepsilon>0$ je libovolně zvolené číslo, a pro všechna x z okolí bodu c je
$$|x-c|<\delta,$$
kde $\delta>0$ je na ε nezávislé.

2. Určíme, je-li funkce lichá $[f(-x)=-f(x)]$ nebo sudá $[f(-x)=f(x)]$. Je-li funkce lichá, je souměrná podle středu souměrnosti (obyčejně to bývá počátek souřadnic *xy*), je-li sudá, je souměrná podle osy *y*.

3. Určíme průsečíky křivky s osami pravoúhlých souřadnic. Body, ve kterých křivka protíná osu *x* spolu s body, ve kterých není křivka spojitá, rozlišují intervaly, v nichž je graf křivky nad osou *x* od intervalů, ve kterých je graf křivky pod osou *x*.

4. V krajních bodech definičních intervalů, ve kterých je funkce spojitá, stanovíme limity funkce a dále $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

5. Vypočítáme $f'(x)$ a $f''(x)$, abychom zjistily, kde je funkce rostoucí $[f'(x)>0]$, klesající $[f'(x)<0]$ a kde jsou lokální extrémy. Dostaneme-li dosazením kořenů rovnice $f'(x)=0$ do $f''(x)$ hodnotu $f''(x)>0$, má funkce lokální minimum, při $f''(x)<0$ má funkce lokální maximum.
V intervalech, kde $f''(x)>0$, je křivka konvexní (vypuklá), kde $f''(x)<0$, je křivka konkávní (vydutá). Body, v nichž $f''(x)$ mění znaménko, jsou inflexní body. Najdeme je tak, že stanovíme hodnoty *x*, pro které je $f''(x)=0$ nebo neexistuje. Číslo *c* je inflexní bod, když existuje takové okolí bodu *c*, že pro $x>c$ je oblouk křivky konvexní a pro $x<c$ konkávní. Je nutné si uvědomit, že když má $f'(x)$ konečnou derivaci, je inflexní bod *c* taky nulovým bodem druhé derivace čili kořen rovnice $f''(x)=0$. Obrácená věta neplatí, tj. z $f''(x)=0$ nevyplívá, že v bodě *c* má $f'(x)$ extrém a že bod *c* je inflexním bodem.

6. Asymptota je tečna křivky $f(x)$, jejíž bod dotyku je v nekonečnu. Platí-li
$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty,$$
je přímka $x=a$ její asymptotou. Jinak asymptoty mají rovnice

[10] HLAVÁČEK, A.: Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky, SPN Praha 1971

$$y = kx + q\,,$$

kde x a y jsou souřadnice bodů na asymptotách. Existují-li konečné limity

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = k \text{ a } \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - kx\right] = q$$

pak je asymptotou přímka $y = kx + q$.

Můžeme-li rovnici křivky rozložit (tj.rozložit její pravou stranu, obyčejně dělením čitatele jmenovatelem, má-li tvar zlomku) na dvě části, z nichž jedna je lineární tvaru $kx + q$ a druhá zbytek $\varphi(x)$, tj.

$$f(x) = kx + q + \varphi(x)$$

a $\varphi(x) \underset{x\to\pm\infty}{\to} 0$, je přímka $y = kx + q$ asymptotou.

7. Zpřesnění grafu křivky provedeme sestavením tabulky souřadnic dalších bodů křivky, tj. ke zvoleným hodnotám x (z definičního oboru funkce) vypočítáme hodnoty y. Do dalších řádků tabulky zapíšeme hodnoty $f'(x)$, $f''(x)$, ve kterých intervalech je funkce rostoucí, ve kterých klesá, kde je vypuklá, kde je dutá, kde jsou lokální extrémy, inflexní body apod., případně sestavíme dílčí tabulky pro jednotlivé charakteristické vlastnosti vyšetřované funkce.