Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

SEMINÁRNÍ PRÁCE Z ÚVODU DO MATEMATICKÉ ANLÝZY

FUNKCE

1999/2000 **CIFRIK**

a) Zadání:

Vyšetřete bez užití limit a derivací funkci $f : y = 5.\{2x-3\}-2$.[1]

Definice:

Necelou část definujeme

$$\{x\} = x - [x],$$

kde $[x]$ je celá část definovaná

$$[x] \le x < [x]+1 .$$

Vypracování:

Definiční obor a obor hodnot viz vlastnosti.

Postup:

Hodnoty necelé části jsou v intervalech mezi dvěma celými, po sobě jdoucími čísly, stejné v celém definičním oboru. Proto pro řešení stačí[2] určit jeden celý interval hodnot čísla *x* ve kterém vraz *2x-3* nenabývá celočíselné hodnoty. Budeme tedy postupovat takto:

1. zjistíme v kterém intervalu čísla *x* není vraz *2x-3* celočíselný
2. určíme v tomto intervalu $\{2x-3\}$[3]
3. hodnoty 5krát zvětšíme[4] a odečteme 2

Výpočet:

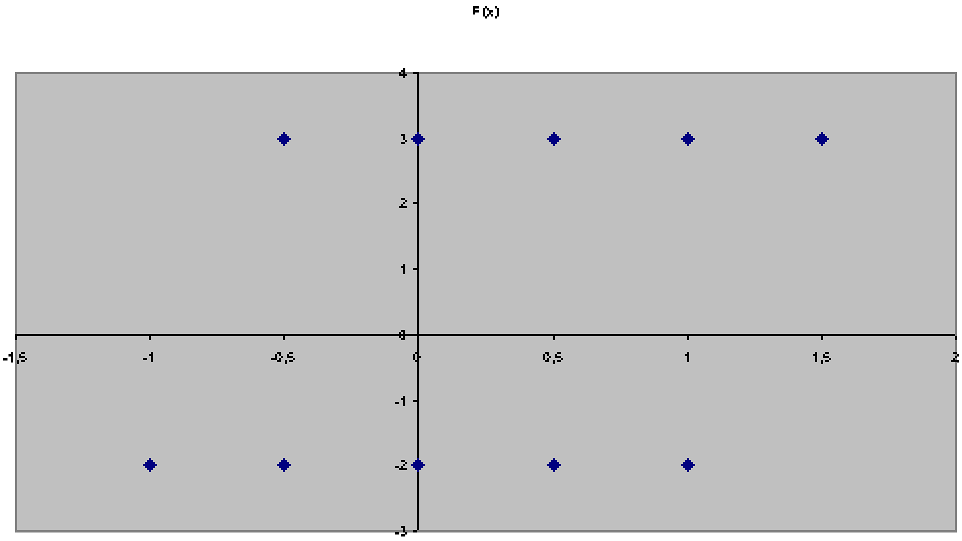
Dosadím-li za x do $y = 2x-3$ nulu, pak $y = -3$. Nejbližší vyšší[5] celé číslo y je $y = -2$, pro které $x = \frac{1}{2}$, proto volím např.[6] $\left\langle 0, \frac{1}{2} \right)$.

x	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$
$2x-3$	-3	$-\frac{11}{4}$	$-\frac{13}{5}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{11}{5}$	není z intervalu
$\{2x-3\}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	není z intervalu
$5.\{2x-3\}$	0	$\frac{5}{4}$	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{10}{3}$	4	není z intervalu
$5.\{2x-3\}-2$	-2	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	2	není z intervalu

---

[1] zjevně jde o zobrazení R x R →R, a tedy o funkci
[2] bez újmy na obecnosti
[3] hodnoty necelé části výrazu *2x-3*
[4] obecně n-krát změníme hodnoty výrazu u nějž zjišťujeme necelou část
[5] mohli jsme pracovat i s nižším
[6] (za *x* jsme mohli volit jiné celé číslo (aby i *y* bylo celé), a tedy i jiné nejbližší celé *y*) = jiný interval

Graf:



Vlastnosti:

Funkce $f' : y = 2x - 3$ je lineární, spojitá, rostoucí a neomezená.

Funkce $f : y = 5.\{2x - 3\} - 2$ je nespojitá, omezená shora [7](nemá maximum, suprémum ano) i zdola [8](nabývá minima i infima), periodická[9], není monotónní (ani rostoucí ani klesající), není ani sudá ani lichá. Je definovaná na R (tj. $\forall x \in R$), tedy $D(f) = R$, obor hodnot $H \in \langle -2, 3)$.

---

[7] sup f = 3
[8] inf f = min f = -2
[9] s periodou p = 2^{-1}

b) Zadání:

Narýsujte (tužkou) graf funkce g a zdůvodněte jeho konstrukci.

$$g : y = |3x-4| - |4+7x| - 6$$

Vypracování:

Definiční obor a obor hodnot viz vlastnosti.
Úlohy tohoto typu obvykle řešíme „metodou intervalů“ („nulových bodů“).

Postup:

1. najdeme hodnoty čísla x ve kterých se výraz v absolutní hodnotě rovná 0
2. tyto hodnoty nám rozdělí $D(g)$ (definiční obor) na intervaly
3. zjistíme jaké znaménko má výraz v absolutní hodnotě na příslušném intervalu
4. zapíšeme a vypočítáme rovnice v jednotlivých intervalech
5. zkonstruujeme graf

Výpočet:

$$3x-4=0 \qquad\qquad 4+7x=0$$

$$x=\frac{4}{3} \qquad\qquad x=-\frac{4}{7}$$

x	$\left(-\infty,-\frac{4}{7}\right)$	$\left\langle-\frac{4}{7},\frac{4}{3}\right\rangle$	$\left(\frac{4}{3},\infty\right)$
$3x-4$	-	-	+
$4+7x$	-	+	+

z čehož plynou rovnice:

$x\in\left(-\infty,-\frac{4}{7}\right)$	$x\in\left\langle-\frac{4}{7},\frac{4}{3}\right\rangle$	$x\in\left(\frac{4}{3},\infty\right)$
$y=-(3x-4)+(4+7x)-6$ $y=6x+2$	$y=-(3x-4)-(4+7x)-6$ $y=-10x-6$	$y=+(3x-4)-(4+7x)-6$ $y=-4x-14$

Všechny funkce jsou na příslušných intervalech lineární[10]. Proto stačí urči dvě hodnoty čísla x v každém z intervalů a hodnoty v nulových bodech výrazů s absolutní hodnotou:

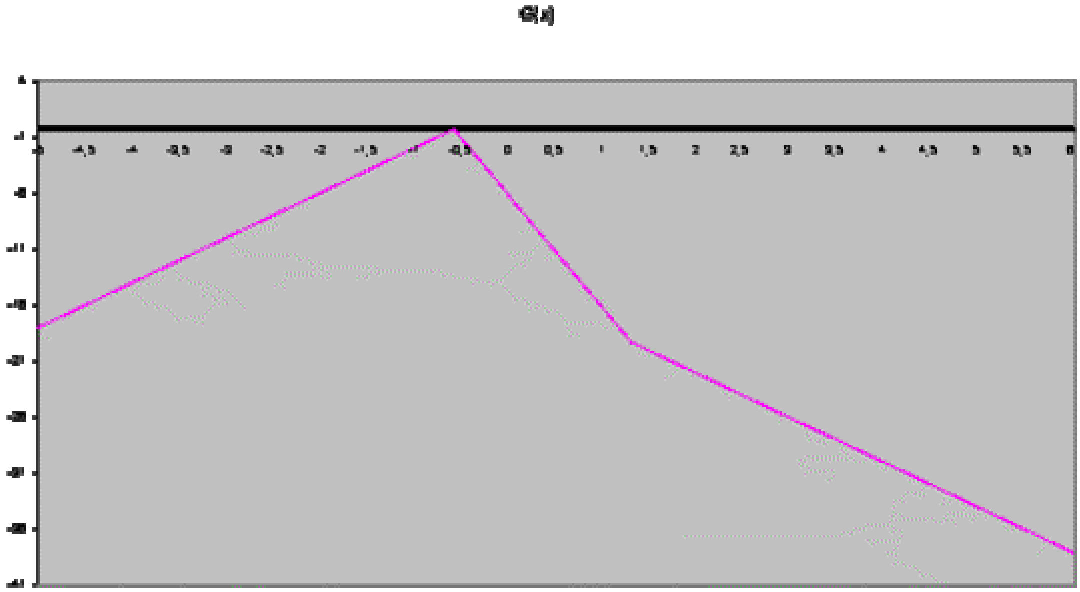
x	-2	-1	$-\frac{4}{7}$	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2
y	-6	-2	$-\frac{2}{7}$	-6	$-\frac{58}{3}$	-20	-22

Snadno sestrojíme graf funkce g.

---

[10] grafem lineární funkce je přímka

Graf:



Vlastnosti:

Funkce $g: y = |3x-4| - |4+7x| - 6$ je spojitá v celém definičním oboru $D(g) = R$, je omezená shora ($\max g = \sup g = -\frac{2}{7}$), není omezená zdola (nemá minimum ani infimum), obor hodnot $H(g) = \left(-\infty, -\frac{2}{7}\right\rangle$; není prostá, není monotónní.

Graf rýsovaný ručně:

c) Zadání:

Zjistěte inverzní funkci k funkci

$$h: y = 1{,}5.\log\frac{2-x}{5-x}.$$

U inverzní funkce napište definiční obor a obor hodnot.

Vypracování:

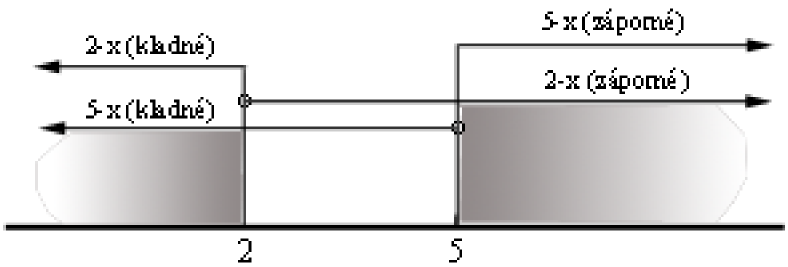
Postup:

1. vyšetřím funkci h
2. určím funkci inverzní h'

Výpočet:

Pro zjištění průběhu funkce $h: y = 1{,}5.\log\frac{2-x}{5-x}$ musíme především určit funkci $k: y = \log\frac{2-x}{5-x}$. Její hodnoty pak 1,5krát zvětšíme.

Funkce $\log x$ je definovaná pro kladná x. Vyšetříme tedy ve kterých intervalech je zlomek $\frac{2-x}{5-x}$ kladný. Zlomek je kladný právě tehdy, když v čitateli i jmenovateli jsou současně čísla kladná nebo záporná.



V našem případě tomu odpovídá interval $(-\infty,2)\cap(5,\infty)$. Nyní již můžeme určit definiční obor $D(h) = R - \langle 2,5\rangle$.

Funkci $k: y = \log\frac{2-x}{5-x}$ vyšetříme na obou intervalech zvlášť pomocí limit.

$x \in (5,\infty)$:

$$x \in (5,\infty) \wedge \lim_{x\to 5}\frac{2-x}{5-x} = \infty \Rightarrow \log\frac{2-x}{5-x} = \infty$$

$$x \in (5,\infty) \wedge \lim_{x\to \infty}\frac{2-x}{5-x} = 1 \Rightarrow \log\frac{2-x}{5-x} = 0$$

$x \in (-\infty,2)$:

$$x \in (-\infty,2) \wedge \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{5-x} = -\infty \Rightarrow \log\frac{2-x}{5-x} = -\infty$$

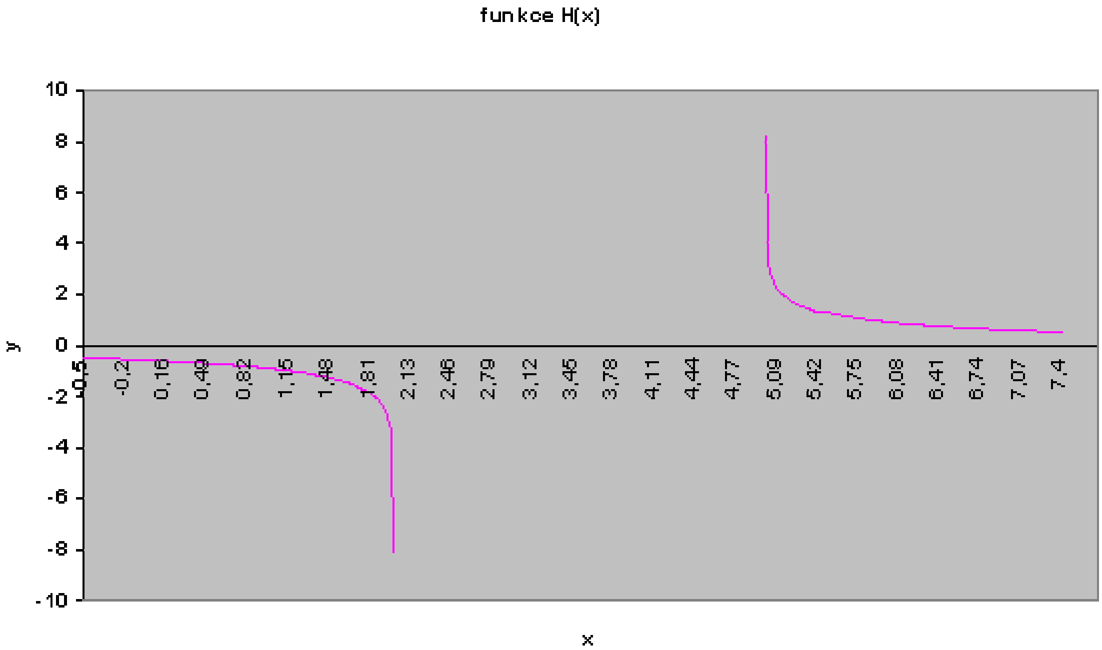
$$x \in (-\infty,2) \wedge \lim_{x\to -\infty}\frac{2-x}{5-x} = 0 \Rightarrow \log\frac{2-x}{5-x} = 0$$

Stejně tak jsme mohli funkci $k: y = \log\frac{2-x}{5-x}$ vyšetřovat dosazováním za proměnnou x a došli bychom k témuž, tj. funkce k má tři asymptoty – osu x a dvě asymptoty rovnoběžné s osou y procházející body (0,2) a (0,5).

x	-2	0	1	$\frac{7}{4}$	$\frac{21}{4}$	6	8
$\log\frac{2-x}{5-x}$	$\doteq -\frac{1}{8}$	$\doteq -\frac{4}{10}$	$\doteq -\frac{3}{5}$	$\doteq -1{,}11$	$\doteq 1{,}11$	$\doteq -\frac{4}{10}$	$\doteq \frac{3}{10}$
$1{,}5.\log\frac{2-x}{5-x}$	$\doteq -\frac{3}{16}$	$\doteq -\frac{12}{20}$	$\doteq -\frac{9}{10}$	$\doteq -1{,}67$	$\doteq 1{,}67$	$\doteq \frac{12}{20}$	$\doteq \frac{9}{20}$

Snadno sestrojíme graf

Graf:



Průběh funkce nám určuje obor hodnot $H(h) = R - \{0\}$.

Vlastnosti:

$D(h) = (-\infty,2) \cap (5,\infty)$; $H(h) = R - \{0\}$; je klesající v $(-\infty,2)$ a v $(5,\infty)$; blíží se neomezeně ose x; není omezená; graf funkce je hyperbola; je prostá[11]; není sudá, ani lichá.

[11] tj. pro $\forall x_1, x_2 \in D(f), x_1 \neq x_2 : f_1(x_1) \neq f_2(x_2)$

Vlastnosti inverzní funkce h':

rovnice:

$$x = 1{,}5 . \log \frac{2-y}{5-y}$$

$$\frac{2x}{3} = \log \frac{5-y-3}{5-y}$$

$$10^{\frac{2x}{3}} = 1 - \frac{3}{5-y}$$

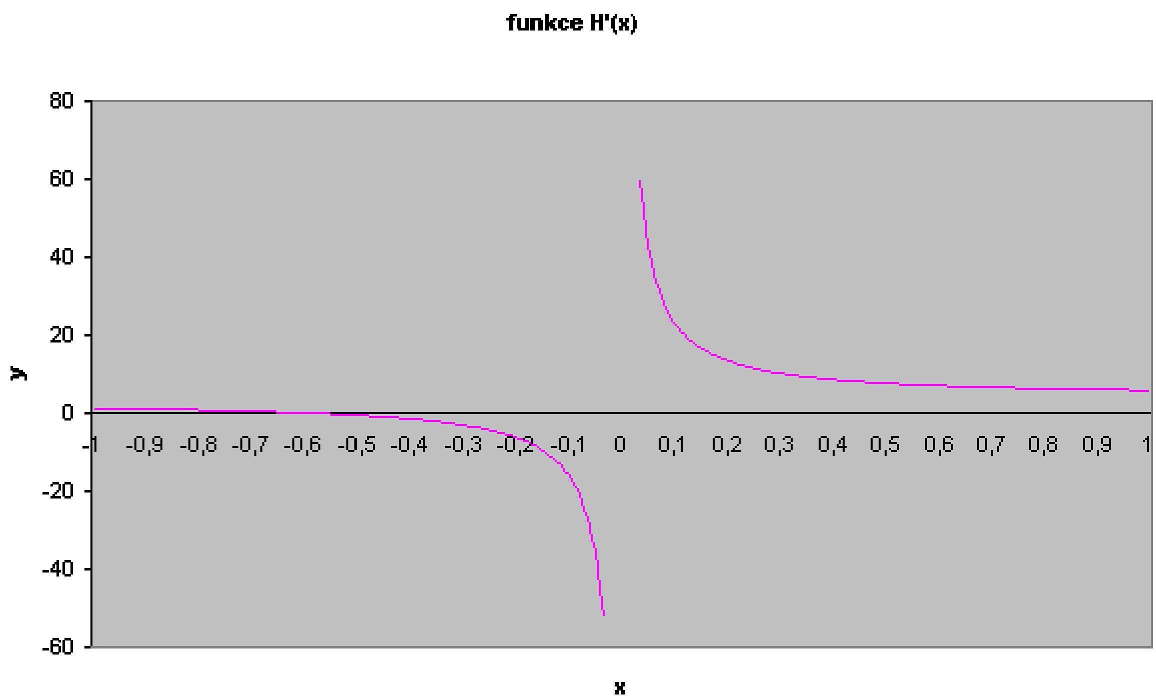
$$\frac{3}{5-y} = 1 - 10^{\frac{2x}{3}}$$

$$5 - y = \frac{3}{1 - 10^{\frac{2x}{3}}}$$

$$y = 5 - \frac{3}{1 - \sqrt[3]{10^{2x}}}$$

$D(h') = R - \{0\}$; $H(h') = (-\infty, 2) \cap (5, \infty)$; je klesající v $(-\infty, 0)$ a v $(0, \infty)$; není omezená[12]; graf funkce je hyperbola; je prostá; není sudá ani lichá.

Graf:



[12] nemá max, sup, min, inf

d) Zadání:

Rovnicí a grafem zadejte funkci, která je periodická a nespojitá na R.

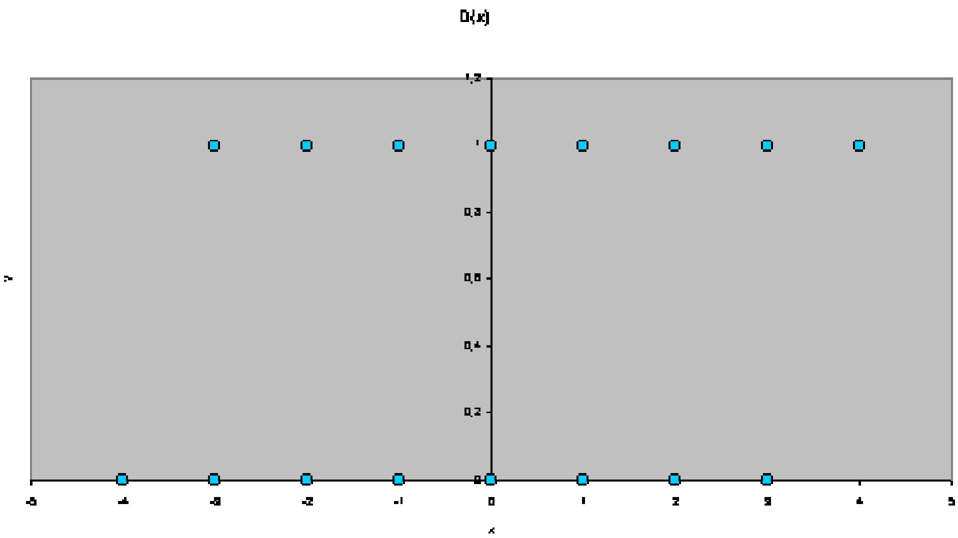
! Funkce vyhovující zadání je již vypracována v úkolu a)!

Vypracování:

Rovnice:

$$d : y = \{x\}$$

Graf:



Vlastnosti:

Funkce $d : y = \{x\}$ je periodická s periodou 1, omezená shora i zdola, nespojitá.