Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

SEMINÁRNÍ PRÁCE Z OBECNÉ ALGEBRY

VLASTNOSTI STRUKTURY (K, +, ·)

2003/2004

Cifrik C., M-TIV

Zadání:

Jaké vlastnosti má struktura, která má dvě vnitřní operace $(K,+,\cdot)$? $K=\{(a_0,a_1,a_2,a_3),\ a_i\in R\}$ a operace jsou definovány takto:

+ (sčítání): $(a_0,a_1,a_2,a_3)+(b_0,b_1,b_2,b_3)=(a_0+b_0,a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$

· (násobení): $(a_0,a_1,a_2,a_3)\cdot(b_0,b_1,b_2,b_3)=(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3,a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_2,a_0b_2+a_2b_0+a_3b_1-a_1b_3,a_0b_3+a_3b_0+a_1b_2-a_2b_1)$

Vypracování:

Vlastnosti operace sčítání

- Komutativnost

Pracujeme s reálnými čísly. Operace sčítání reálných čísel je komutativní. Proto

$$(a_0,a_1,a_2,a_3)+(b_0,b_1,b_2,b_3)=(a_0+b_0,a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)=(b_0+a_0,b_1+a_1,b_2+a_2,b_3+a_3)=(b_0,b_1,b_2,b_3)+(a_0,a_1,a_2,a_3)$$

Operace + je na K komutativní. Struktura je uzavřená na sčítání.

- Asociativnost

$$[(a_0,a_1,a_2,a_3)+(b_0,b_1,b_2,b_3)]+(c_0,c_1,c_2,c_3)=(a_0,a_1,a_2,a_3)+[(b_0,b_1,b_2,b_3)+(c_0,c_1,c_2,c_3)]$$
$$(a_0+b_0,a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)+(c_0,c_1,c_2,c_3)=(a_0,a_1,a_2,a_3)+(b_0+c_0,b_1+c_1,b_2+c_2,b_3+c_3)$$
$$(a_0+b_0+c_0,a_1+b_1+c_1,a_2+b_2+c_2,a_3+b_3+c_3)=(a_0+b_0+c_0,a_1+b_1+c_1,a_2+b_2+c_2,a_3+b_3+c_3)$$

Operace + je na K asociativní.

- Neutrální prvek

$$(a_0,a_1,a_2,a_3)+(x_0,x_1,x_2,x_3)=(a_0,a_1,a_2,a_3)$$
$$(a_0+x_0,a_1+x_1,a_2+x_2,a_3+x_3)=(a_0,a_1,a_2,a_3)$$

$$\begin{aligned} a_0+x_0&=a_0 &\Leftrightarrow\quad x_0&=0\\ a_1+x_1&=a_1 &\Leftrightarrow\quad x_1&=0\\ a_2+x_2&=a_2 &\Leftrightarrow\quad x_2&=0\\ a_3+x_3&=a_3 &\Leftrightarrow\quad x_3&=0\end{aligned}$$

Neutrální prvek operace + je $(x_0,x_1,x_2,x_3)=(0,0,0,0)$.

- Inverzní prvek

$$(a_0,a_1,a_2,a_3)+(y_0,y_1,y_2,y_3)=(0,0,0,0)$$
$$(a_0+y_0,a_1+y_1,a_2+y_2,a_3+y_3)=(0,0,0,0)$$

$$\begin{aligned} a_0+y_0&=0 &\Leftrightarrow\quad y_0&=-a_0\\ a_1+y_1&=0 &\Leftrightarrow\quad y_1&=-a_1\\ a_2+y_2&=0 &\Leftrightarrow\quad y_2&=-a_2\\ a_3+y_3&=0 &\Leftrightarrow\quad y_3&=-a_3 \end{aligned}$$

Inverzní prvek operace + je $(y_0,y_1,y_2,y_3)=(-a_0,-a_1,-a_2,-a_3)$.

Struktura $(K,+)$ tvoří Abelovu grupu.

Vlastnosti operace násobení

- Komutativnost

$$(a_0,a_1,a_2,a_3)\cdot(b_0,b_1,b_2,b_3)\neq(b_0,b_1,b_2,b_3)\cdot(a_0,a_1,a_2,a_3)$$
$$\begin{pmatrix} a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3,a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_2,\\ a_0b_2+a_2b_0+a_3b_1-a_1b_3,a_0b_3+a_3b_0+a_1b_2-a_2b_1 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} b_0a_0-b_1a_1-b_2a_2-b_3a_3,b_0a_1+b_1a_0+b_2a_3-b_3a_2,\\ b_0a_2+b_2a_0+b_3a_1-b_1a_3,b_0a_3+b_3a_0+b_1a_2-b_2a_1 \end{pmatrix}$$

Operace $\cdot$ není na K komutativní. Struktura je uzavřená na násobení.

- Neutrální prvek

$$ax=a=xa$$
$$(a_0,a_1,a_2,a_3)\cdot(x_0,x_1,x_2,x_3)=(a_0,a_1,a_2,a_3)=(x_0,x_1,x_2,x_3)\cdot(a_0,a_1,a_2,a_3)$$
$$(a_0,a_1,a_2,a_3)\cdot(x_0,x_1,x_2,x_3)=(a_0x_0-a_1x_1-a_2x_2-a_3x_3,a_0x_1+a_1x_0+a_2x_3-a_3x_2,a_0x_2+a_2x_0+a_3x_1-a_1x_3,a_0x_3+a_3x_0+a_1x_2-a_2x_1)=(a_0,a_1,a_2,a_3)$$
$$\left.\begin{aligned} a_0x_0-a_1x_1-a_2x_2-a_3x_3&=a_0\\ a_0x_1+a_1x_0+a_2x_3-a_3x_2&=a_1\\ a_0x_2+a_2x_0+a_3x_1-a_1x_3&=a_2\\ a_0x_3+a_3x_0+a_1x_2-a_2x_1&=a_3 \end{aligned}\right\}\Leftrightarrow(x_0,x_1,x_2,x_3)=(1,0,0,0)$$

Neutrální prvek operace $\cdot$ je $(x_0,x_1,x_2,x_3)=(1,0,0,0)$.

- Asociativnost

$$[(a_0,a_1,a_2,a_3)\cdot(b_0,b_1,b_2,b_3)]\cdot(c_0,c_1,c_2,c_3)=(a_0,a_1,a_2,a_3)\cdot[(b_0,b_1,b_2,b_3)\cdot(c_0,c_1,c_2,c_3)]$$

$$\begin{pmatrix} a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3,a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_2, \\ a_0b_2+a_2b_0+a_3b_1-a_1b_3,a_0b_3+a_3b_0+a_1b_2-a_2b_1 \end{pmatrix}\cdot(c_0,c_1,c_2,c_3)=(a_0,a_1,a_2,a_3)\cdot\begin{pmatrix} b_0c_0-b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3,b_0c_1+b_1c_0+b_2c_3-b_3c_2, \\ b_0c_2+b_2c_0+b_3c_1-b_1c_3,b_0c_3+b_3c_0+b_1c_2-b_2c_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_0b_0c_0-a_1b_1c_0-a_2b_2c_0-a_3b_3c_0-a_0b_1c_1-a_1b_0c_1-a_2b_3c_1+a_3b_2c_1- \\ -a_0b_2c_2-a_2b_0c_2-a_3b_1c_2+a_1b_3c_2-a_0b_3c_3-a_3b_0c_3-a_1b_2c_3+a_2b_1c_3, \\ \\ a_0b_0c_1-a_1b_1c_1-a_2b_2c_1-a_3b_3c_1+a_0b_1c_0+a_1b_0c_0+a_2b_3c_0-a_3b_2c_0+ \\ +a_0b_2c_3+a_2b_0c_3+a_3b_1c_3-a_1b_3c_3-a_0b_3c_2-a_3b_0c_2-a_1b_2c_2+a_2b_1c_3, \\ \\ a_0b_0c_2-a_1b_1c_2-a_2b_2c_2-a_3b_3c_2+a_0b_2c_0+a_2b_0c_0+a_3b_1c_0-a_1b_3c_0+ \\ +a_0b_3c_1+a_3b_0c_1+a_1b_2c_1-a_2b_1c_1-a_0b_1c_3-a_1b_0c_3-a_2b_3c_3+a_3b_2c_3, \\ \\ a_0b_0c_3-a_1b_1c_3-a_2b_2c_3-a_3b_3c_3+a_0b_3c_0+a_3b_0c_0+a_1b_2c_0-a_2b_1c_0+ \\ +a_0b_1c_2+a_1b_0c_2+a_2b_3c_2-a_3b_2c_2-a_0b_2c_1-a_2b_0c_1-a_3b_1c_1+a_1b_3c_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_0b_0c_0-a_0b_1c_1-a_0b_2c_2-a_0b_3c_3-a_1b_0c_1-a_1b_1c_0-a_1b_2c_3+a_1b_3c_2- \\ -a_2b_0c_2-a_2b_2c_0-a_2b_3c_1+a_2b_1c_3-a_3b_0c_3-a_3b_3c_0-a_3b_1c_2+a_3b_2c_1, \\ \\ a_0b_0c_1+a_0b_1c_0+a_0b_2c_3-a_0b_3c_2+a_1b_0c_0-a_1b_1c_1-a_1b_2c_2-a_0b_3c_3+ \\ +a_2b_0c_3+a_2b_3c_0+a_2b_1c_3-a_2b_2c_1-a_3b_0c_2-a_3b_2c_0-a_3b_3c_1+a_3b_1c_3, \\ \\ a_0b_0c_2+a_0b_2c_0+a_0b_3c_1-a_0b_1c_3+a_2b_0c_0-a_2b_1c_1-a_2b_2c_2-a_2b_3c_3+ \\ +a_3b_0c_1+a_3b_1c_0+a_3b_2c_3+a_3b_3c_2-a_1b_0c_3-a_1b_3c_0-a_1b_1c_2+a_1b_2c_1, \\ \\ a_0b_0c_3+a_0b_3c_0+a_0b_1c_2-a_0b_2c_1+a_3b_0c_0-a_3b_1c_1-a_3b_2c_2-a_3b_3c_3+ \\ +a_1b_0c_2+a_1b_2c_0+a_1b_3c_1-a_1b_1c_3-a_2b_0c_1-a_2b_1c_0-a_2b_2c_3+a_2b_3c_2 \end{pmatrix}$$

Operace $\cdot$ je na K asociativní.

- Inverzní prvek

$$aa^{-1} = x = a^{-1}a$$

$$(a_0, a_1, a_2, a_3)\cdot(y_0, y_1, y_2, y_3) = (1,0,0,0) = (y_0, y_1, y_2, y_3)\cdot(a_0, a_1, a_2, a_3)$$

$$(a_0, a_1, a_2, a_3)\cdot(y_0, y_1, y_2, y_3) = (a_0y_0 - a_1y_1 - a_2y_2 - a_3y_3, a_0y_1 + a_1y_0 + a_2y_3 - a_3y_2, a_0y_2 + a_2y_0 + a_3y_1 - a_1y_3, a_0y_3 + a_3y_0 + a_1y_2 - a_2y_1) = (1,0,0,0)$$

$$\begin{aligned} a_0y_0 - a_1y_1 - a_2y_2 - a_3y_3 &= 1 \\ a_0y_1 + a_1y_0 + a_2y_3 - a_3y_2 &= 0 \\ a_0y_2 + a_2y_0 + a_3y_1 - a_1y_3 &= 0 \\ a_0y_3 + a_3y_0 + a_1y_2 - a_2y_1 &= 0 \end{aligned}$$

Z této soustavy vypočítáme inverzní prvek

$$(y_0, y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{a_0}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \frac{-a_1}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \frac{-a_2}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \frac{-a_3}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\right), \quad (a_0, a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0,0).$$

Struktura $(K - \{(0,0,0,0)\}, \cdot)$ tvoří grupu.

Distributivita

Prověříme ještě distributivitu operace + vzhledem k operaci $\cdot$

$$(a+b)\cdot c = ac+bc$$

$$\left[(a_0,a_1,a_2,a_3)+(b_0,b_1,b_2,b_3)\right]\cdot(c_0,c_1,c_2,c_3)=(a_0+b_0,a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)\cdot(c_0,c_1,c_2,c_3)=$$

$$=\begin{pmatrix}(a_0+b_0)\cdot c_0-(a_1+b_1)\cdot c_1-(a_2+b_2)\cdot c_2-(a_3+b_3)\cdot c_3, \\ (a_0+b_0)\cdot c_1+(a_1+b_1)\cdot c_0+(a_2+b_2)\cdot c_3-(a_3+b_3)\cdot c_2, \\ (a_0+b_0)\cdot c_2+(a_2+b_2)\cdot c_0+(a_3+b_3)\cdot c_1-(a_1+b_1)\cdot c_3, \\ (a_0+b_0)\cdot c_3+(a_3+b_3)\cdot c_0+(a_1+b_1)\cdot c_2-(a_2+b_2)\cdot c_1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_0c_0-a_1c_1-a_2c_2-a_3c_3,a_0c_1+a_1c_0+a_2c_3-a_3c_2, \\ a_0c_2+a_2c_0+a_3c_1-a_1c_3,a_0c_3+a_3c_0+a_1c_2-a_2c_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_0c_0-b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3,b_0c_1+b_1c_0+b_2c_3-b_3c_2, \\ b_0c_2+b_2c_0+b_3c_1-b_1c_3,b_0c_3+b_3c_0+b_1c_2-b_2c_1\end{pmatrix}=$$

$$=(a_0,a_1,a_2,a_3)\cdot(c_0,c_1,c_2,c_3)+(b_0,b_1,b_2,b_3)\cdot(c_0,c_1,c_2,c_3)$$

Distributivita operace + vzhledem k operaci $\cdot$ platí.

Závěr

Vyšetřovaná struktura $(K,+,\cdot)$ tvoří těleso ($(K,+)$ je Abelova grupa, $(K-\{(0,0,0,0)\},\cdot)$ je grupa).

Zadání:
Najděte podobor struktury $(K,+,\cdot)$, který je izomorfní s $(R,+,\cdot)$ a s $(C,+,\cdot)$.

Vypracování:

- $(R,+,\cdot)$

Reálná čísla lze do struktury kvaternionů přepsat $R=\{(x,0,0,0);\, x\in R\}\subset K$. Označme hledaný podobor X a ověřme, že $f_R : R \to X : x\in R \mapsto (x,0,0,0)$.
Důkaz:

- $$\left.\begin{aligned} f_R(x+y)&=(x+y,0,0,0)=(x,0,0,0)+(y,0,0,0)\\ f_R(x)+f_R(y)&=(x,0,0,0)+(y,0,0,0)\end{aligned}\right\} f_R(x+y)=f_R(x)+f_R(y)$$
- $$\left.\begin{aligned} f_R(x\cdot y)&=(x\cdot y,0,0,0)\\ f_R(x)\cdot f_R(y)&=(x,0,0,0)\cdot(y,0,0,0)=(x\cdot y,0,0,0)\end{aligned}\right\} f_R(x\cdot y)=f_R(x)\cdot f_R(y)$$

Tvrzení platí.

- $(C,+,\cdot)$

Komplexní čísla lze do struktury kvaternionů přepsat $C=\{(a,b,0,0);\, a,b\in R\}\subset K$. Označme hledaný podobor Y a ověřme, že $f_R : C \to Y : z\in C \mapsto (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z,0,0)$.
Důkaz:

- $$\left.\begin{aligned} f_C(x+y)&=(\operatorname{Re}(x+y)+\operatorname{Im}(x+y),0,0)=(\operatorname{Re}x+\operatorname{Re}y,\operatorname{Im}x+\operatorname{Im}y,0,0)=(\operatorname{Re}x,\operatorname{Im}x,0,0)+(\operatorname{Re}y,\operatorname{Im}y,0,0)\\ f_C(x)+f_C(y)&=(\operatorname{Re}x,\operatorname{Im}x,0,0)+(\operatorname{Re}y,\operatorname{Im}y,0,0)\end{aligned}\right\} f_C(x+y)=f_C(x)+f_C(y)$$
- $$\left.\begin{aligned} f_C(x\cdot y)&=(\operatorname{Re}(x\cdot y),\operatorname{Im}(x\cdot y),0,0)=(\operatorname{Re}x\operatorname{Re}y-\operatorname{Im}x\operatorname{Im}y,\operatorname{Re}x\operatorname{Im}y+\operatorname{Im}x\operatorname{Re}y,0,0)\\ f_C(x)\cdot f_C(y)&=(\operatorname{Re}x,\operatorname{Im}x,0,0)\cdot(\operatorname{Re}y,\operatorname{Re}y,0,0)=(x\cdot y,0,0,0)=(\operatorname{Re}x\operatorname{Re}y-\operatorname{Im}x\operatorname{Im}y,\operatorname{Re}x\operatorname{Im}y+\operatorname{Im}x\operatorname{Re}y,0,0)\end{aligned}\right\} f_C(x\cdot y)=f_C(x)\cdot f_C(y)$$

Tvrzení platí.

Dodatek:

KVATERNIONY[1], matematické objekty, které zavedl Hamilton roku 1853 jako rozšíření pojmu komplexního čísla. Jsou dány čtveřicemi reálných čísel a, b, c, d, z nichž je vytvořen výraz

$$q = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k},$$

kde i, j, k jsou symboly, které lze násobit podle pravidel daných tabulkou

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

[1] ROSSIOVA, A.: Encyklopedie matematiky. Mladá Fronta, Praha 1988.