

Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

DOMÁCÍ ÚKOL Z ALGEBRY 4
VLASTNOSTI STRUKTURY

Zadání:

Nechť je dána operace skládání (*) a množina funkcí $G = \{f_1, f_2, \dots, f_6\}$, kde

$$f_1(x) = x \quad D_f \in R - \{0,1\}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x}$$

$$f_3(x) = 1 - x$$

$$f_4(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f_5(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

Vytvořte tabulku a zjistěte vlastnosti struktury $(G,*)$.

Vypracování:

Skládání provádíme tak, že první ze skládaných funkcí dosadíme za proměnnou x do druhé funkce a vzniklý výraz upravíme, např.

$$\frac{1}{x} * \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}$$

$$\frac{1}{1-x} * \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{1}{1-x}} = 1-x$$

Tabulka¹

*	x	$\frac{1}{x}$	$1-x$	$\frac{1}{1-x}$	$1-\frac{1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$
x	x	$\frac{1}{x}$	$1-x$	$\frac{1}{1-x}$	$1-\frac{1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	x	$1-\frac{1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$	$1-x$	$\frac{1}{1-x}$
$1-x$	$1-x$	$\frac{1}{1-x}$	x	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$	$1-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{1-x}$	$1-x$	$\frac{x}{x-1}$	$1-\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{x}$
$1-\frac{1}{x}$	$1-\frac{1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{1-x}$	$1-x$
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	$1-\frac{1}{x}$	$\frac{1}{1-x}$	$1-x$	$\frac{1}{x}$	x

¹ Zápis v tabulce odpovídá obvyklému značení, tj. v každém políčku tabulky je uveden prvek přiřazený uspořádané dvojici, jejíž první prvek je v záhlaví příslušného řádku a jejíž druhý prvek je v záhlaví příslušného sloupce.

Klasifikaci struktury $(G,*)$ provedeme na základě vlastností operace $*$:

- množina G je zřejmě uzavřená² vzhledem k této operaci
- operace je asociativní, tj. $\forall a, b, c \in G : (a * b) * c = a * (b * c)$

např.³

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{1-x} * 1-x \right) * \frac{x}{x-1} &= \frac{x}{x-1} * \frac{x}{x-1} = x \\ \frac{1}{1-x} * \left(1-x * \frac{x}{x-1} \right) &= \frac{1}{1-x} * 1 - \frac{1}{x} = x \end{aligned} \right\} \left(\frac{1}{1-x} * 1-x \right) * \frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-x} * \left(1-x * \frac{x}{x-1} \right)$$

- má neutrální prvek⁴ $-x$
- ke každému prvku $f \in G$ existuje inverzní prvek $f^{(*)} \in G$ vzhledem k operaci $*$, a to

$$\begin{aligned} x^{(*)} &= x & \left(\frac{1}{1-x} \right)^{(*)} &= 1 - \frac{1}{x} \\ \left(\frac{1}{x} \right)^{(*)} &= \frac{1}{x} & \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{(*)} &= \frac{1}{1-x} \\ (1-x)^{(*)} &= 1-x & \left(\frac{x}{x-1} \right)^{(*)} &= \frac{x}{x-1} \end{aligned}$$

- není komutativní⁵

Vyšetřovaná struktura tvoří grupu řádu 6.

² v tabulce nejsou „nevyplněná políčka“

³ obdobně bychom asociativitu dokazovali pro další prvky

⁴ viz první řádek a sloupec tabulky

⁵ tabulka není symetrická