

**Univerzita Karlova v Praze**  
**Pedagogická fakulta**

SEMINÁRNÍ PRÁCE Z POLYNOMICKÉ ALGEBRY  
**POLYNOM**

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20$$

### Zadání:

Vyšetřete všemi probranými prostředky polynom  $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20$ .

### Vypracování:

#### Racionální kořeny

Podle věty:

Nechť  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  je kořen polynomu  $f(x) = a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n$ . Pak  $p \mid a_n, q \mid a_0$ .

určíme množinu  $M$  všech racionálních čísel, které mohou být kořeny:

V našem případě je

$$p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20\}$$

$$q \in \{\pm 1\}$$

a proto

$$M = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20\}.$$

Tuto množinu  $M$  ještě omezíme, neboť platí věta:

Nechť  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  je kořen polynomu  $f(x) = a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n$ , necht'  $c \in \mathbb{Z}$ .  
Pak  $(qc - p) \mid f(c), (qc + p) \mid f(-c)$  (používá se nejčastěji pro  $c = 1$ , kdy dostáváme pro kořen  $\frac{p}{q}$  podmínky  $(q - p) \mid f(1), (q + p) \mid f(-1)$ ).

Nejprve zjistíme, že  $f(1) = -30, f(-1) = -6$ . Další výpočet zapíšeme do tabulky:

$\frac{p}{q}$	$q + p \mid -6$	$q - p \mid -30$	výsledek
2	3	-1	ano
-2	-1	3	ano
4	5	-3	ne
-4	-3	5	ano
5	6	-4	ne

$\frac{p}{q}$	$q + p \mid -6$	$q - p \mid -30$	výsledek
-5	-4	6	ne
10	11	-9	ne
-10	-9	11	ne
20	21	-19	ne
-20	-19	21	ne

Zjistili jsme, že  $M_1 = \{2, -2, -4\}$ . Hornerovým schématem vyšetříme, které prvky z  $M_1$  jsou kořeny polynomu  $f$ :

2	1	-2	1	-10	-20
	0	2	0	2	-16
	1	0	1	-8	-36

-2	1	-2	1	-10	-20
	0	-2	8	-18	56
	1	-4	9	-28	36

4	1	-2	1	-10	-20
	0	4	8	36	104
	1	2	9	26	84

Z vypočítaných hodnot plyne závěr – polynom  $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20$  nemá racionální kořeny.

## Odhad počtu reálných kořenů a jejich polohy

### Descartesova věta:

Počet kladných kořenů polynomu  $f(x) = a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n$  je buď roven počtu znaménkových změn v posloupnosti  $a_0, a_1, \dots, a_n$  jeho koeficientů, nebo je o sudý počet menší.

- V polynomu  $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20$  jsou 3 znaménkové změny. Počet kladných kořenů je tedy buď 3 nebo 1.

Všechny reálné kořeny polynomu  $f(x) = a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n$  leží v intervalu  $\langle -1 - A, 1 + A \rangle$ , kde  $A = \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|)$

- V našem případě je

$$A = \max(|1|, |-2|, |1|, |-10|, |-20|) = 20$$

proto všechny reálné kořeny polynomu  $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20$  leží v intervalu  $\langle -21; 21 \rangle$

Další odhady polohy reálných kořenů polynomu  $f(x) = a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n$ .

Předpokládejme, že aspoň jeden z koeficientů polynomu  $f$  je záporný.

Označme

- $a_i$  ... nejmenší záporný koeficient,
- $a_r$  ... první záporný koeficient
- $a_s$  ... největší kladný koeficient před prvním záporným koeficientem,
- $B$  ... největší z absolutních hodnot záporných koeficientů.

Pak pro každý reálný kořen  $\alpha$  polynomu  $f(x) = a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n$  platí:

**Maclaurinova věta**  $\alpha < 1 + \frac{|a_i|}{|a_0|},$

**Lagrangeova věta**  $\alpha < 1 + \sqrt[r]{B},$

**Tillotova věta**  $\alpha < 1 + \sqrt[r-s]{\frac{|a_i|}{a_s}}$

- Pro náš polynom  $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20$  platí:

$$a_i = a_4 = -20$$

$$a_r = a_1 = -2$$

$$a_s = a_0 = 1$$

$$B = 20$$

Maclaurinova věta:	$\alpha < 1 + \frac{ a_i }{ a_0 }$	Tillotova věta:	$\alpha < 1 + r \sqrt[r-s]{\frac{ a_i }{a_s}}$
	$\alpha < 1 + \frac{ -20 }{1}$		$\alpha < 1 + \sqrt[1-0]{\frac{ -20 }{1}}$
	$\alpha < 21$		$\alpha < 21$
Lagrangeova věta:	$\alpha < 1 + \sqrt[r]{B}$		
	$\alpha < 1 + \sqrt[4]{20}$		
	$\alpha < 21$		

Použití těchto vět nám původní odhad  $\langle -21; 21 \rangle$  nezlepšilo.

Dolní odhady kořenů polynomu  $f$  získáme opakováním postupu pro polynom  $g$ , pro který platí

$$g(x) = f(-x)$$

(protože  $n$  je sudé, kdyby bylo liché, platilo by  $g(x) = -f(-x)$ ).

Polynom  $g$  tedy je

$$g(x) = f(-x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 10x - 20$$

a protože má jedenu znaménkovou změnu, má i jeden kladný kořen. Proto má polynom  $f$  jeden záporný kořen.

Pro polynom  $g(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 10x - 20$  platí:

$$a_i = a_4 = -20$$

$$a_r = a_4 = -20$$

$$a_s = a_3 = 10$$

$$B = 20$$

Maclaurinova věta:	$\alpha < 1 + \frac{ a_i }{ a_0 }$	Tillotova věta:	$\alpha < 1 + r \sqrt[r-s]{\frac{ a_i }{a_s}}$
	$\alpha < 1 + \frac{ -20 }{1}$		$\alpha < 1 + \sqrt[4-3]{\frac{ -20 }{10}}$
	$\alpha < 21$		$\alpha < 3$
Lagrangeova věta:	$\alpha < 1 + \sqrt[r]{B}$		
	$\alpha < 1 + \sqrt[4]{20} < 3,115$		

Zjistili jsme, že reálné kořeny polynomu  $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20$  leží v intervalu  $\langle -3; 21 \rangle$ . Jeden kořen je záporný a buď tři nebo jeden je kladný.

## Separace kořenů

Separovat kořeny polynomu  $f$  znamená určit intervaly, v nichž leží právě jeden kořen polynomu  $f$ .

### Sturmův řetězec:

Nechť  $f \in R[x]$ . Sturmovým řetězcem polynomu  $f$  nazýváme konečnou posloupnost polynomů  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , definovaných takto:

$$\begin{aligned}f_1(x) &= f(x), & f_2(x) &= f'(x), \\f_{j-1}(x) &= q_{j-1}(x)f_j(x) - f_{j+1}(x), & j &= 2, \dots, m-1 \\f_{m-1}(x) &= q_{m-1}(x)f_m(x)\end{aligned}$$

(polynom  $-f_{j+1}$  je zbytek při dělení polynomu  $f_{j-1}$  polynomem  $f_j$ ,  $f_m$  je  $D(f, f')$ ).

### Sturmova věta:

Bud'  $f \in R[x]$ . Nechť je  $\alpha < \beta$  a  $f(\alpha)f(\beta) \neq 0$ . Pak počet navzájem různých kořenů polynomu  $f(x) = a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n$  ležících v intervalu  $\langle \alpha, \beta \rangle$  je roven číslu  $\sigma(\alpha) - \sigma(\beta)$ , kde  $\sigma(x)$  je počet znaménkových změn ve Sturmově řetězci polynomu  $f(x) = a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n$ .

(Pomocí této věty můžeme určit přesný počet kořenů daného polynomu v daném intervalu.)

Sturmův řetězec polynomu  $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20$  má tyto členy:

$$\begin{aligned}f_1(x) &= f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20 \\f_2(x) &= f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 10 \\f_3(x) &= \frac{1}{4}x^2 + \frac{29}{4}x + \frac{85}{4} \\f_4(x) &= -3200x - 10360 \\f_5(x) &= -\frac{79591}{32400}\end{aligned}$$

(jednotlivé výpočty členů posloupnosti jsou uvedeny v [dodatku](#)).

Protože je  $\text{st}(D(f, f')) = 0$ , nemá polynom  $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20$  vícenásobné kořeny (tj. má pouze jednoduché kořeny).

Sestrojme nyní tabulku znamének polynomu ze Sturmova řetězce v intervalu  $\langle -3; 21 \rangle$ , k výpočtu znamének hodnot v jednotlivých bodech můžeme využít také Hornerovo schéma (ukázka v [dodatku](#)):

$x$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$\sigma(x)$
-3	+	-	+	-	-	3
-2	+	-	+	-	-	3
-1	-	-	+	-	-	2
0	-	-	+	-	-	2
1	-	-	+	-	-	2
2	-	+	+	-	-	2
3	-	+	+	-	-	2
4	+	+	+	-	-	1
5	+	+	+	-	-	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
20	+	+	+	-	-	1

Z tabulky vidíme, že polynom  $f$  má jeden jednoduchý kořen v intervalu  $(-2, -1)$  a jeden jednoduchý kořen v intervalu  $(3, 4)$ .

## Iterační metody hledání reálných kořenů polynomu $f \in R[x]$

### Metoda půlení intervalu:

Hledáme kořen  $\alpha$  polynomu  $f$  s přesností  $\varepsilon > 0$ . Buď  $\langle c_1, c_2 \rangle$  takový interval, že znaménka čísel  $f(c_1), f(c_2)$  jsou různá (pak v intervalu  $(c_1, c_2)$  leží aspoň jeden kořen polynomu  $f$ ). Označme  $c_3 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$ . Pak buď  $f(c_3) = 0$  a  $\alpha = c_3$ , nebo  $f(c_3) \neq 0$ . Ke konstrukci bodu  $c_4$  použijeme ten z intervalů  $\langle c_1, c_3 \rangle, \langle c_3, c_2 \rangle$ , pro který platí  $f(c_i)f(c_3) < 0$  (tj. ten interval, v jehož krajních bodech má funkce  $f$  opačná znaménka). Popsaným způsobem pokračujeme tak dlouho, až nalezneme buď přímo kořen  $\alpha$ , nebo až platí  $|c_{i-1} - c_i| < \varepsilon$ .

### Metoda tečen (Newtonova metoda):

Předpokládejme, že polynom  $f \in R[x]$  má jednoduché kořeny. Necht'  $\langle \alpha, \beta \rangle$  je takový interval, uvnitř kterého leží jediný kořen  $\alpha$  polynomu  $f$ , a necht' na celém intervalu  $\langle \alpha, \beta \rangle$  je  $f'(x) \neq 0, f''(x) \neq 0$ . Označme  $c_1$  to z čísel  $\alpha, \beta$ , pro něž platí  $f(c_1)f''(c_2) > 0$ ,  $d_1$  druhé z čísel  $\alpha, \beta$ , tj. číslo, pro něž platí  $f(d_1)f''(d_2) < 0$ . Utvořme posloupnosti

$$c_1, c_2 = c_1 - \frac{f(c_1)}{f'(c_1)}, c_3 = c_2 - \frac{f(c_2)}{f'(c_2)}, \dots,$$
$$d_1, d_2 = d_1 - \frac{f(d_1)}{f'(d_1)}, d_3 = d_2 - \frac{f(d_2)}{f'(d_2)}, \dots$$

Potom jedna z posloupností je klesající, druhá rostoucí a obě posloupnosti konvergují ke kořenu  $\alpha$  polynomu  $f$ .

### Metoda sečen (metoda regula falsi):

Předpokládejme, že polynom  $f \in R[x]$  má jednoduché kořeny. Necht'  $\langle \alpha, \beta \rangle$  je takový interval, uvnitř kterého leží jediný kořen  $\alpha$  polynomu  $f$ , a necht' na celém intervalu  $\langle \alpha, \beta \rangle$  je  $f'(x) \neq 0, f''(x) \neq 0$ . Označme

$$c_1 = \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}.$$

Sestrojme posloupnost  $\{c_n\}$  předpisem

$$c_n = \frac{c_{n-1}f(\beta) - \beta f(c_{n-1})}{f(\beta) - f(c_{n-1})}, n = 2, 3, \dots$$

Pak posloupnost  $\{c_n\}$  konverguje ke kořenu  $\alpha$  polynomu  $f$ .

## Aproximace kořenů

Platí  $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 10$ ,  $f''(x) = 12x^2 - 12x + 2$ . Uvažujme nejprve interval  $(-2, -1)$ . Protože  $f(-2) > 0$ ,  $f(-1) < 0$ ,  $f'(x) < 0$ ,  $f''(x) > 0$ , můžeme použít kteroukoli z uvedených iteračních metod. Použijme například Newtonovu metodu:

$$\begin{array}{lll} c_1 = -2 & f(c_1) = 36 & f'(c_1) = -70 \\ c_2 = c_1 - \frac{f(c_1)}{f'(c_1)} = -1,48571 & f(c_2) = 8,49584 & f'(c_2) = -39,333458 \\ c_3 = c_2 - \frac{f(c_2)}{f'(c_2)} = -1,26972 & f(c_3) = 1,002566 & f'(c_3) = -30,400648 \\ c_4 = c_3 - \frac{f(c_3)}{f'(c_3)} = -1,23674 & f(c_4) = 0,0196407 & f'(c_4) = -29,217155 \\ c_5 = c_4 - \frac{f(c_4)}{f'(c_4)} = -1,23607 & & \\ \\ d_1 = -1 & f(d_1) = -6 & \\ d_2 = d_1 - \frac{f(d_1)}{f'(d_1)} = -1,118779 & f(d_2) = -4,014943 & \\ d_3 = d_2 - \frac{f(d_2)}{f'(d_2)} = -1,23283 & f(d_3) = -1,369229 & \\ d_4 = d_3 - \frac{f(d_3)}{f'(d_3)} = -1,23606 & f(d_4) = -0,09439 & \end{array}$$

Víme, že posloupnost  $\{c_n\}$  je rostoucí, posloupnost  $\{d_n\}$  klesající a

$x_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ . Proto

$$x_1 \in (c_5, d_4) = (-1,23607, -1,23606)$$



I v druhém intervalu (3, 4) můžeme použít Newtonovu metodu, protože  $f(3) < 0, f(4) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0$ .

$c_1 = 4$	$f(c_1) = 84$	$f'(c_1) = 158$
$c_2 = c_1 - \frac{f(c_1)}{f'(c_1)} = 3,468354$	$f(c_2) = 18,609368$	$f'(c_2) = 91,64985$
$c_3 = c_2 - \frac{f(c_2)}{f'(c_2)} = 3,265306$	$f(c_3) = 2,06131675$	$f'(c_3) = 71,81895$
$c_4 = c_3 - \frac{f(c_3)}{f'(c_3)} = 3,236604$	$f(c_4) = 0,03712353$	$f'(c_4) = 69,24115$
$c_5 = c_4 - \frac{f(c_4)}{f'(c_4)} = 3,236068$		
$d_1 = 3$	$f(d_1) = -14$	
$d_2 = d_1 - \frac{f(d_1)}{f'(d_1)} = 3,088608$	$f(d_2) = -9,2721034$	
$d_3 = d_2 - \frac{f(d_2)}{f'(d_2)} = 3,189776$	$f(d_3) = -3,1089784$	
$d_4 = d_3 - \frac{f(d_3)}{f'(d_3)} = 3,233065$	$f(d_4) = -0,2073528$	
$d_5 = d_4 - \frac{f(d_4)}{f'(d_4)} = 3,23606$		

Víme, že posloupnost  $\{c_n\}$  je klesající, posloupnost  $\{d_n\}$  rostoucí a

$$x_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n. \text{ Proto}$$

$$x_2 \in (d_5, c_4) = (3,23606; 3,236068)$$

### Závěr:

Polynom  $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20$  má dva reálné jednoduché kořeny. První z nich v intervalu  $x_1 \in (-1,23607, -1,23606)$  a druhý v intervalu

$x_2 \in (3,23606; 3,236068)$ . Polynom je stupně 4, proto má další dva komplexní kořeny.

- Program DERIVE všechny kořeny vypočetl takto:

$$x_1 = 1 + \sqrt{5}$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{5}$$

$$x_3 = i\sqrt{5}$$

$$x_4 = -i\sqrt{5}$$

## DODATKY

### Hornerovo schéma ve vybraných bodech

-2	1	-2	1	-10	-20	-1	1	-2	1	-10	-20
	0	-2	8	-18	56		0	-1	3	-4	14
	1	-4	9	-28	36		1	-3	4	-14	-6
3	1	-2	1	-10	-20	4	1	-2	1	-10	-20
	0	3	3	12	6		0	4	8	36	104
	1	1	4	2	-14		1	2	9	26	84

### Výpočty polynomů Sturmova řetězce

$$f_1(x) = f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20$$

$$f_2(x) = f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 10$$

$$f_1(x) : f_2(x)$$

$$(x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20) : (4x^3 - 6x^2 + 2x - 10) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned}
 &-(x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x) \\
 &\quad -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{15}{2}x - 20 \\
 &-( -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}) \\
 &\quad -\frac{1}{4}x^2 - \frac{29}{4}x - \frac{85}{4}
 \end{aligned}$$

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20 = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\right)(4x^3 - 6x^2 + 2x - 10) - \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{29}{4}x + \frac{85}{4}\right)$$

$$f_3(x) = \underline{\underline{\frac{1}{4}x^2 + \frac{29}{4}x + \frac{85}{4}}}$$

$$f_2(x) : f_3(x)$$

$$\begin{aligned}
 &(4x^3 - 6x^2 + 2x - 10) : \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{29}{4}x + \frac{85}{4}\right) = \\
 &= (16x^3 - 24x^2 + 8x - 40) : (x^2 + 29x + 85) = 16x - 488 \\
 &-(16x^3 + 464x^2 + 1360x) \\
 &\quad -488x^2 - 1352x - 40 \\
 &-( -488x^2 - 14152x - 41480) \\
 &\quad 12800x + 41440
 \end{aligned}$$

$$4x^3 - 6x^2 + 2x - 10 = (16x - 488)\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{29}{4}x + \frac{85}{4}\right) - (-3200x - 10360)$$

$$f_4(x) = \underline{\underline{-3200x - 10360}}$$

$$f_3(x) : f_4(x)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{4}x^2 + \frac{29}{4}x + \frac{85}{4} \right) : (-3600x - 10360) = -\frac{1}{14400}x - \frac{2351}{1296000} \\ & - \left( \frac{1}{4}x^2 + \frac{259}{360}x + \frac{85}{4} \right) \\ & \quad \frac{2351}{360}x + \frac{85}{4} \\ & - \left( \frac{2351}{360}x + \frac{608909}{32400} \right) \\ & \quad \frac{79591}{32400} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{29}{4}x + \frac{85}{4} = \left( -\frac{1}{14400}x - \frac{2351}{1296000} \right) (-3600x - 10360) - \left( -\frac{79591}{32400} \right)$$

$$f_5(x) = -\frac{79591}{32400}$$

## LITERATURA

- NOVOTNÁ, J. – TRCH, M.: Algebra a teoretická aritmetika. Polynomická algebra. Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, Praha 2000.
- ŠISLER, M. – ANDRYS, J.: O řešení algebraických rovnic. Mladá fronta, Praha 1966.

## OBSAH

Racionální kořeny .....	1
Odhad počtu reálných kořenů a jejich polohy .....	2
Separace kořenů .....	4
Iterační metody hledání reálných kořenů polynomu $f \in R[x]$ .....	6
DODATKY .....	9
LITERATURA .....	10
OBSAH .....	10