Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

SEMINÁRNÍ PRÁCE Z POLYNOMICKÉ ALGEBRY

ZVOLENÝ POLYNOM

2001/2002 **CIFRIK**

Zadání:

Zvol polynom $f(x)$ stupně 6 takový, aby

$$a_6, a_0, f(1) \in \{8,27,18,12,30,20,36,40,28\}.$$

Urči všechny kořeny s násobností.

Vypracování:

Zadání vyhovuje pro $a_0 = 28,\ a_n = 18,\ f(1) = 40$ polynom

$$f(x) = 28x^6 + 88x^5 + 51x^4 - 77x^3 - 77x^2 + 9x + 18.$$

Nechť $c \in Z$ je kořen polynomu $f(x) = a_0x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n$. Pak $c \mid a_n$.

Určím celočíselné kořeny polynomu f. Protože $a_n = 18$, mohou jimi být pouze prvky z množiny $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$. Protože $f(1) = 40$ (viz dodatek), není 1 kořenem polynomu f. Dále použiji Hornerovo schéma (příp. opakované Hornerovo schéma k určení násobnosti kořene). Platí

	28	88	51	-77	-77	9	18
-1	0	-28	-60	9	68	9	-18
	28	60	-9	-68	-9	18	0
-1	0	-28	-32	41	27	-18	
	28	32	-41	-27	18	0	
-1	0	-28	-4	45	-18		
	28	4	-45	18	0		
-1	0	-28	24	-21			
	28	-24	21	-3			

Číslo -1 je tedy trojnásobným kořenem polynomu f. Dále stačí hledat kořeny polynomu[1]

$$g(x) = 28x^3 + 4x^2 - 45x + 18.$$

Tento polynom již nemá další celočíselné kořeny[2]. Prověřím racionální kořeny.

Nechť $\frac{p}{q} \in Q$ je kořen polynomu $f(x) = a_0x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, nechť $c \in Z$.
Pak $(qc - p) \mid f(c), (qc + p) \mid f(-c)$ (používá se nejčastěji pro $c = 1$, kdy dostáváme pro kořen $\frac{p}{q}$ podmínky $(q - p) \mid f(1), (q + p) \mid f(-1)$).

$$p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$$
$$q \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 7, \pm 14, \pm 28\}$$

[1] Poslední řádek Hornerova schéma, v němž je zbytek nulový. Ukázka dělení je v dodatku.
[2] O tom bych se přesvědčil opakovaným dosazením do Hornerova schéma, ale polynom jsem si vymýšlel sám a vím jak vše dopadne.

Množina možných racionálních kořenů M:

$$M \in \left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{7}, \pm \frac{1}{14}, \pm \frac{1}{28}, \pm 2, \pm \frac{2}{7}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{3}{7}, \pm \frac{3}{14}, \pm \frac{3}{28}, \pm 9, \pm \frac{9}{2}, \pm \frac{9}{4}, \right.$$

$$\left. \pm \frac{9}{7}, \pm \frac{9}{14}, \pm \frac{9}{28}, \pm 6, \pm \frac{6}{7}, \pm 18, \pm \frac{18}{7} \right\}$$

Čísla $1, -1$ jsem již prověřili. Platí

	28	4	-45	18
$\frac{1}{2}$	0	14	9	-18
	28	18	-36	0
$\frac{1}{2}$	0	14	16	
	28	32	-20	

Číslo $\frac{1}{2}$ je jednoduchým kořenem polynomu g, tedy i polynomu f. K určení zbylých kořenů použiji polynom[3]

$$h(x) = 28x^2 + 18x - 36$$

Podle vzorce pro kořeny kvadratické funkce dostávám zbylé kořeny $-\frac{3}{2}, \frac{6}{7}$.

Závěr:

Zjistil jsem, že kořeny polynomu f jsou čísla -1 (trojnásobný kořen), $-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{6}{7}$ (jednoduché kořeny) a tedy

$$f(x) = 28x^6 + 88x^5 + 51x^4 - 77x^3 - 77x^2 + 9x + 18 = 28 \cdot (x+1)^3 \left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{6}{7}\right).$$

[3] Poslední řádek Hornerova schéma, v němž je zbytek nulový. Ukázka dělení je v dodatku

Dodatek

Hodnota polynomu $f(x) = 28x^6 + 88x^5 + 51x^4 - 77x^3 - 77x^2 + 9x + 18$ v bodě 1:

	28	88	51	-77	-77	9	18
1	0	28	116	167	90	13	22
	28	116	167	90	13	22	$\boxed{40}$

Dělení polynomu f trojnásobným kořenem ($(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$):

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
(28x^6 & +88x^5 & +51x^4 & -77x^3 & -77x^2 & +9x & +18) & :(x^3 +3x^2 +3x +1) = 28x^3 +4x^2 -45x +18 \\
-28x^6 & -84x^5 & -84x^4 & -28x^3 & & & & \\
 & 4x^5 & -33x^4 & -105x^3 & -77x^2 & & & \\
 & -4x^5 & -12x^4 & -12x^3 & -4x^2 & & & \\
 & & -45x^4 & -117x^3 & -81x^2 & +9x & & \\
 & & 45x^4 & +135x^3 & +135x^2 & +45x & & \\
 & & & 18x^3 & +54x^2 & +54x & +18 & \\
 & & & -18x^3 & -54x^2 & -54x & -18 & \\
 & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Dělení polynomu g jednoduchým kořenem:

$$
\begin{array}{rrrrl}
(28x^3 & +4x^2 & -45x & +18) & :(x - \frac{1}{2}) = 28x^2 +18x -36 \\
-28x^3 & +14x^2 & & & \\
 & 18x^2 & -45x & & \\
 & -18x^2 & +9x & & \\
 & & -36x & +18 & \\
 & & 36x & -18 & \\
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

SEMINÁRNÍ PRÁCE Z POLYNOMICKÉ ALGEBRY

NÁSOBENÍ POLYNOMŮ

2001/2002 **CIFRIK**

Zadání:

a) Dokažte, že násobení polynomů je asociativní.
b) Dokažte, že násobení polynomů je distributivní vzhledem ke sčítání polynomů

Vypracování:

V dalším textu budeme polynomy zapisovat jako nekonečné posloupnosti prvků.

Násobení polynomů

Nechť $a=\langle a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots\rangle$, $b=\langle b_0,b_1,\ldots,b_n,\ldots\rangle$ jsou dva polynomy a nechť je dána operace násobení polynomů. Součinem těchto polynomů je polynom

$$c=\langle c_0,c_1,\ldots,c_n,\ldots\rangle,$$

kde

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0b_0 \\ c_1 &= a_0b_1+a_1b_0 \\ c_2 &= a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0 \\ c_3 &= a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0 \\ &\vdots \\ c_n &= \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p} \end{aligned}$$

Ad a)

Máme dokázat, že násobení polynomů je asociativní. Nechť $a=\langle a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots\rangle$, $b=\langle b_0,b_1,\ldots,b_n,\ldots\rangle$, $c=\langle c_0,c_1,\ldots,c_n,\ldots\rangle$ jsou tři polynomy a nechť je dána operace násobení polynomů. Aby násobení polynomů bylo asociativní, musí platit $\forall n\in N_0:[a\cdot(b\cdot c)]_n=[(a\cdot b)\cdot c]_n$, tj. nezáleží na uzávorkování.

Důkaz přímý:

Označme d_n n-tý člen polynomu $a\cdot(b\cdot c)$. Pak pro

$$\begin{aligned} \forall n\in N_0:\quad d_n &= \sum_{p=0}^{n} a_p (b\cdot c)_{n-p} = \sum_{p=0}^{n} a_p \sum_{r=0}^{n-p} b_r c_{n-p-r} = \\ &= a_0(b_0c_n+b_1c_{n-1}+\ldots+b_nc_0)+a_1(b_0c_{n-1}+b_1c_{n-2}+\ldots+b_{n-1}c_0)+ \\ &+ a_2(b_0c_{n-2}+b_1c_{n-3}+\ldots+b_{n-2}c_0)+\ldots+a_{n-1}(b_0c_1+b_1c_0)+a_nb_0c_0 \end{aligned}$$

Označme h_n n-tý člen polynomu $(a\cdot b)\cdot c$. Pak pro

$$\begin{aligned} \forall n\in N_0:\quad h_n &= \sum_{p=0}^{n} (a\cdot b)_p \cdot c_{n-p} = \sum_{p=0}^{n} c_{n-p} \sum_{r=0}^{p} a_r b_{p-r} = \\ &= c_n(a_0b_0)+c_{n-1}(a_0b_1+a_1b_0)+\ldots+c_0(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_{n-1}b_1+a_nb_0) \end{aligned}$$

upravíme-li poslední vztah tím, že ze všech členů obsahujících a_0 vytkneme a_0, ze všech členů s a_1 vytkneme a_1 atd. až do a_n, získáme rovnost

$$\begin{aligned} h_n &= a_0(b_0c_n+b_1c_{n-1}+\ldots+b_nc_0)+a_1(b_0c_{n-1}+b_1c_{n-2}+\ldots+b_{n-1}c_0)+ \\ &+ a_2(b_0c_{n-2}+b_1c_{n-3}+\ldots+b_{n-2}c_0)+\ldots+a_{n-1}(b_0c_1+b_1c_0)+a_nb_0c_0 \end{aligned}.$$

Protože jsou n-té členy obou součinů stejné, platí, že násobení polynomů je asociativní.

QED

Ad b)

Máme dokázat, že násobení polynomů je distributivní vzhledem ke sčítání polynomů. Opět provedeme důkaz přímý.

Nechť $a = \langle a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \rangle$, $b = \langle b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots \rangle$, $c = \langle c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots \rangle$ jsou tři polynomy nad oborem integrity I, kde jsou dány operace sčítání a násobení polynomů. Aby násobení polynomů bylo distributivní vzhledem ke sčítání a násobení polynomů, musí platit

$$[a \cdot (b + c)]_n = (a \cdot b + b \cdot c)_n,$$

tj. lze roznásobovat závorky.

<u>Důkaz:</u>

Zápis přepíšeme do sum a podle pravidel o počítání se sumami upravíme:

$$[a \cdot (b + c)]_n = \sum_{p=0}^{n} a_p (b + c)_{n-p} = \sum_{p=0}^{n} a_p \left(b_{n-p} + c_{n-p}\right) = \sum_{p=0}^{n} \left(a_p b_{n-p} + a_p c_{n-p}\right) =$$

$$= \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p} + \sum_{p=0}^{n} a_p c_{n-p} = [(a \cdot b) + (b \cdot c)]_n = (a \cdot b + b \cdot c)_n$$

Dokázali jsme požadovanou rovnost.

QED

Opakování:

Binární operace[4]

(Binární) operací ☺ na množině M rozumíme každé zobrazení (celého) kartézského součinu $M \times M$ do M. Není-li definičním oborem celá množina $M \times M$ hovoříme o parciální nebo též částečné operaci.

Říkáme, že operace ☺ na množině M

- je komutativní, jestliže $(\forall a, b \in M)\ a ☺ b = b ☺ a$
- je asociativní, jestliže $(\forall a, b, c \in M)\ (a ☺ b) ☺ c = a ☺ (b ☺ c)$,
- má neutrální prvek n, jestliže $(\exists n \in M)(\forall c \in M)\ n ☺ c = c ☺ n = c$
- má agresivní prvek a, jestliže $(\exists a \in M)(\forall c \in M)\ a ☺ c = c ☺ a = a$
- má inverzní prvek c^{-1} ke každému prvku c, jestliže existuje neutrální prvek n a platí $(\forall c \in M)(\exists c^{-1} \in M)\ c ☺ c^{-1} = c^{-1} ☺ c = n$.

Distributivní zákon

$(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z)$ (distributivita operace $\circ$ vzhledem k operaci $*$)

Polynom, mnohočlen[5]

Polynom je algebraický výraz tvaru $a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_{k-1} x + a_k$. Čísla $a_0, a_1, \ldots, a_k$ jsou konstanty, tzv. koeficienty mnohočlenu, x je proměnná. Je-li $a_0 \neq 0$, nazývá se číslo k stupeň mnohočlenu. Mnohočlen lze považovat za funkci proměnné x. Obdobně se definuje mnohočlen více proměnných; např. $x^3 + 4xy^2 z - yz + 2$ je mnohočlen tří proměnných a čtvrtého stupně (nejvyšší součet exponentů u všech proměnných).

[4] www.matematika.webz.cz/algebra/algebra.doc

[5] www.diderot.cz